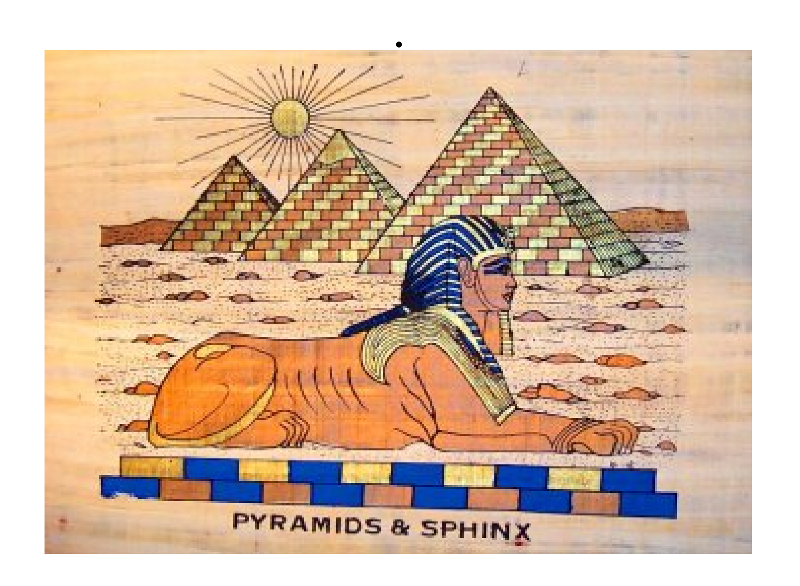
CALCULO VECTORIAL

.

E.E. KASSIR

.



Universidad Nacional de Colombia.

Bogotá, enero de 2009.

ÍNDICE GENERAL

Prefacio

Introducción

CAPÍTULO 1

GEOMETRIA DEL ESPACIO EUCLIDIANO



Es el mejor de los buenos
quien sabe que en esta vida
todo es cuestión de medida:
un poco más, algo menos...
A. MACHADO, CXXVI
"Proverbios y cantares", XII

En los cursos anteriores de cálculo se consideraron funciones de variable real y valor real, o sea funciones definidas sobre subconjuntos de la recta real. El cálculo vectorial considera funciones definidas en espacios vectoriales euclidianos. Sin embargo muchas aplicaciones prácticas requieren de la rica estructura geométrica del espacio euclidiano.

En este capítulo se tratará el espacio euclidiano en detalle, como una condición para poder iniciar un curso básico de cálculo para funciones de varias variables. La belleza y la potencia del álgebra lineal se vera con mayor claridad cuando visualisemos $\mathbb{R}^n$ como un espacio vectorial. El estudio de los espacios vectoriales no es tan diferente del estudio de $\mathbb{R}^n$, ya que a partir de la geometria en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ podemos visualizar muchos conceptos. Se inicia con los conceptos de punto y vector en $\mathbb{R}^n$, coordenadas, planos coordenados hasta llegar a la topología básica de $\mathbb{R}^n$.

1.1. El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

El conjunto $\mathbb{R}^n$ es la coleción de todas las n-tuplas ordenadas de números reales y esta determinado por $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n)|x_i \in \mathbb{R}\}$.Recordando que el producto cartesiano de los conjuntos A y B no vacios es por definición el conjunto $A \times B$ de parejas ordenadas (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$, podemos ver que $\mathbb{R}^n$ es el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ (n veces).

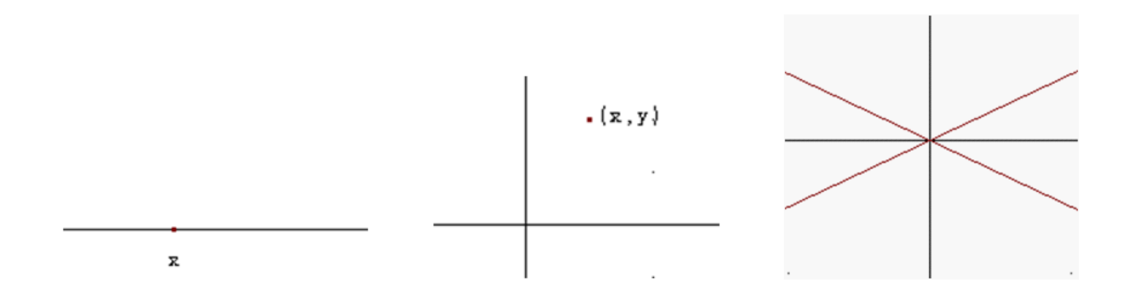
La idea de emplear un número para situar un punto sobre una recta fue conocida por los griegos. En 1637 Rene Descartes [1]utilizo un par de números para situar un punto en el plano y una terna de números para situar un punto en el espacio. En el siglo Arthur Cayley y H.G. Grassman extendierón esta idea a n-tuplas de números reales. La representación geométrica de $\mathbb{R}$, es el conjunto de los puntos P de una recta identificados mediante un único número real x, luego de determinar una unidad de longitud. De igual forma la representación geométrica de $\mathbb{R}^2$, es el conjunto puntos P de un plano identificados mediante una única pareja ordenada de números reales (x_1, x_2), escogiendo un punto fijo 0 llamado origen y dos rectas dirigidas que pasan por 0 y son perpendiculares llamadas

[1]



René Descartes. Nacio el 31 de marzo de 1596 en La Haye (Touraine) actual Descartes y murio el 11 de febrero, de 1650 en Estocolmo Considerado el primer filósofo moderno, utilizó la ciencia y las matemáticas para explicar y pronosticar acontecimientos en el mundo físico. Su famosa frase Çogito, ergo sum"("Pienso, luego existo") fue el punto de partida que le llevó a investigar las bases del conocimiento. Lo inquietaron los métodos de los geómetras griegos para llegar a sus ingeniosas pruebas y se propuso corregirlos mediante el manejo de líneas y figuras tridimensionales en una gráfica. Dibujaba la gráfica marcando unidades en una línea horizontal (eje x) y una línea vertical (eje y); así, cualquier punto de la gráfica podía describirse con dos números. Aunque conservaba las reglas de la geometría euclidiana, combinaba el álgebra y la geometría, consideradas entonces como independientes, para formar una nueva disciplina matemática llamada geometría analítica.

ejes de coordenadas x_1 y x_2, aunque es más familiar usar para los puntos y los ejes x y y, en lugar de x_1 y x_2. Los dos ejes de coordenadas dividen el plano cartesiano en cuatro partes llamadas cuadrantes. Las coordenadas cartesianas del punto P estan formadas por la pareja ordenada (a, b) en donde a se denomina abscisa y es la distancia perpendicular dirigida de P al eje x, luego su proyección en el eje x es un punto $Q(a, 0)$, y b se denomina ordenada y es la distancia perpendicular dirigida de P al eje y, luego su proyección en el eje y es un punto $R(0, b)$. Tambien la representación geométrica de $\mathbb{R}^3$, es el conjunto puntos P del espacio identificados mediante una única terna ordenada de números reales (x_1, x_2, x_3), escogiendo un punto fijo 0 llamado origen y tres rectas dirigidas que pasan por 0 y son perpendiculares entre si, llamadas ejes de coordenadas x_1, x_2 y x_3,aunque es más familiar usar para los puntos y los ejes x, y y z, en lugar de x_1, x_2 y x_3. Los tres ejes de coordenadas determinan tres planos coordenados xy (o $z = 0$), xz (o $y = 0$) y yz (o $x = 0$), que dividen el espacio en ocho partes llamadas octantes. Para un punto $P(a, , b, c)$, a, b y c son las distancias dirigidas del punto P a los planos coordenados xy, xz y yx respectivamente y su proyección en estos planos son los puntos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$ obtenidolos en forma geometrica trazando una perpendicular desde el punto hasta el plano coordenado. Aunque no se puedan graficar todos los casos, es posible imaginar la representación geometrica $\mathbb{R}^n$, como el conjunto de puntos P en $\mathbb{R}^n$ identificados mediante una n-tupla ordenada de números reales $(x_1, x_2, ..., x_n)$,.x_i se denomina coordenada i-esima o la componente i-esima de P. Se adoptara la convencion de usar letras en negrita para denotar n-tuplas en y letras ordinarias para denotar simplemente numéros reales.



El conjunto $\mathbb{R}^n$ está dotado de dos operaciones algebraicas suma y producto por escalar. Dados dos puntos $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ de $\mathbb{R}^n$,su suma $X + Y$ esta definida por $X + Y = (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$ y dado $k \in \mathbb{R}$, el multiplo escalar kX esta definido por, $kX = k(x_1, x_2, ..., x_n) = (kx_1, kx_2, ..., kx_n)$, geometricamente kX es una translación del punto X.

Ejemplo 1.1.1 *Si* $P(2, 1, -3)$ *y* $Q(0, -1, 1)$ *entonces:*

$P + Q = (2, 1, -3) + (0, -1, 1) = (2 + 0, 1 - 1, -3 + 1) = (2, 0, -2)$,

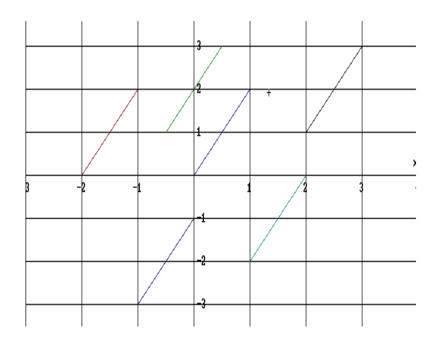
$P - Q = (2, 1, -3) - (0, -1, 1) = (2 - 0, 1 + 1, -3 - 1) = (2, 2, -4)$,

$2P = 2(2, 1, -3) = (4, 2, -6)$

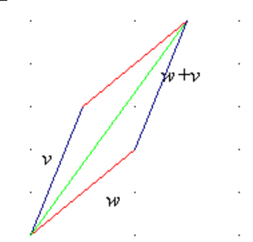
$5Q = 5(0, -1, 1) = (0, -5, 5)$

Frecuentemente los elementos de $\mathbb{R}^n$ se denominan vectores. Ademas un vector es simplemente una n- tupla ordenada de números reales representado por PQ donde P y Q son puntos de $\mathbb{R}^n$, tales que P es el punto inicial de $\mathbf{v}$ y Q es el punto final de $\mathbf{v}$, numericamente $\mathbf{v} = [q_i - p_i]$ para $i = 1, 2, ...n$. Si $P = 0$ se dice que $\mathbf{v}$ esta anclado en el origen y $\mathbf{v}$ de denomina vector posición del punto P.

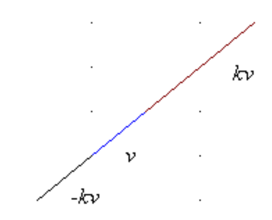
Notación 1 $\mathbf{v} = [v_i]$ *con* $i = 1, 2, 3, ..., n$



Diferentes representaciones del vector $[1, 2]$



Geometricamente $\mathbf{v} + \mathbf{w}$



Geometricamente $k\mathbf{v}$

Ejemplo 1.1.2 *El vector* $\mathbf{v}$ *con punto inicial* $P(2, 3, 1)$ *y punto final* $Q(-1, 1, 2)$ *es igual a* $\mathbf{v} = [(-1, 1, 2) - (2, 3, 1)] = [-1 - 2, 1 - 3, 2 - 1] = [-3, -2, 1]$

Dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son iguales si $v_i = w_i$ para todo $i = 1, 2, ...n$ y dos vectores son equivalentes si tienen igual dirección, longitud y sentido, sin importar la posición que tengan. Igual que en puntos el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ está dotado de dos operaciones algebraicas, llamadas suma vectorial y producto por escalar, dados dos vectores $\mathbf{v} = [v_1, v_2, ..., v_n]$ y $\mathbf{w} = [w_1, w_2, ..., w_n]$ de $\mathbb{R}^n$, su suma $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ esta definida por, $\mathbf{v} + \mathbf{w} = [v_1, v_2, ..., v_n] + [w_1, w_2, ..., w_n] = [v_1 + w_1, v_2 + w_2, ..., v_n + w_n]$ y dado $k \in \mathbb{R}$, el multiplo

escalar $k\mathbf{v}$ esta definido por $k\mathbf{v} = [kv_1, kv_2, ..., kv_n]$. El número real k se denomina escalar. Geometricamente $\mathbf{v}$ y $k\mathbf{v}$ son paralelos, si k es positivo entonces $k\mathbf{v}$ tiene igual dirección y sentido que $\mathbf{v}$ y si k es negativo $k\mathbf{v}$ tiene igual dirección y sentido contrario que $\mathbf{v}$.

Nota: $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ es una abreviación de $\mathbf{v} + (-\mathbf{w})$ y $(-\mathbf{w})$ es una abreviación de $(-1)\mathbf{w}$

Ejemplo 1.1.3 *Si* $\mathbf{v} = [4, 2, 1, 0]$ *y* $\mathbf{w} = [2, 0, -1, 1]$ *entonces*

$\mathbf{v} + \mathbf{w} = [4, 2, 1, 0] + [2, 0, -1, 1] = [4 + 2, 2 + 0, 1 - 1, 0 + 1] = [6, 2, 0, 1],$

$\mathbf{v} - \mathbf{w} = [4, 2, 1, 0] - [2, 0, -1, 1] = [4 - 2, 2 - 0, 1 + 1, 0 - 1] = [2, 2, 2, -1],$

$4\mathbf{v} = 4[4, 2, 1, 0] = [16, 8, 4, 0]$

$2\mathbf{w} = -2[2, 0, -1, 1] = [-4, 0, 2, -2]$

Ejemplo 1.1.4 *Para que valores de k los vectores* $[\ 3, -5]$ *y* $[k\alpha, 10\alpha]$ *son iguales.*

Por igualdad de vectores $3 = k\alpha$ *y* $-5 = 10\alpha$,

como $\alpha = -\frac{1}{2}$ *entonces* $3 = -\dfrac{1}{2}k$ *luego* $k = -6$

Un espacio vectorial es un conjunto V no vacio con dos aplicaciones $+ : V \times V \to V$ *y* $\bullet : R \times V \to VV$ *, tal que para todo v, w, u de V satisface las siguientes propiedades.*

(i) $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathbf{V}$

(ii) $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{u} = \mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{u})$

(iii) $\exists \mathbf{0} \in \mathbf{V}$, $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$

(iv) $\exists - \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = (-\mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(v) $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$

(vi) $k\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ para todo $k \in \mathbb{R}$

$(viii)$ $(k + l)\mathbf{v} = k\mathbf{v} + l\mathbf{v}$ para todo $k, l \in \mathbb{R}$

(ix) $(kl)\mathbf{v} = k(l\mathbf{v})$ para todo $k, l \in \mathbb{R}$

(x) $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

Los elementos de un espacio vectorial se denominan vectores.

$\mathbb{R}^n$ con la suma usual y el producto por escalar usual es un espacio vectorial.

Ejemplo 1.1.5 *El conjunto* $\mathbf{V} = C[0, 1]$ *de las funciones continuas de valor real definidas en el intervalo* $[0, 1]$ *con* $f(0) = 0$ *y* $f(1) = 0$*, con la suma usual y el producto por escalar entre funciones, es un espacio vectorial, pues si* $f \in \mathbf{V}$ *y* $g \in \mathbf{V}$*, entonces* $f + g$ *es continua y* $f(0) + g(0) = f(1) + g(1) = 0$*. luego* $0 \in \mathbf{V}$*, ademas* $-f$ *es continua y* $-f(0) = -f(1) = 0$

Ejemplo 1.1.6 *El conjunto* $\mathbf{V} = \{5\}$ *con la suma y producto usuales en* $\mathbb{R}$ *no es espacio vectorial ya que* $5 + 5 = 10 \notin \mathbf{V}$.

Ejercicios sección 1.1

1. Suponga que empezamos un recorrido en el origen moviendonos a lo largo del eje $\boldsymbol{x}$ 5 unidades en dirección positiva, luego nos movemos 4 unidades en dirección paralela al eje $\boldsymbol{y}$ positivo, y por ultimo nos movemos 3 unidades hacia abajo. Cuales son las coordenadas de nuestra posición?

2. Determine cual de los siguientes puntos $P(1,2,3)$, $Q(2,-1,5)$, $R(0,3,-6)$ y $S(8,5,-2)$

   a) Esta mas cerca del plano $\boldsymbol{xy}$.

   b) Esta en el plano $\boldsymbol{yz}$.

   c) Esta mas lejos del plano $\boldsymbol{xz}$

3. Cuales son las proyecciones del vector $\boldsymbol{v} = [1,-2,2]$ en los planos coordenados. Trace un paralelepipedo con aristas en estas proyecciones, un vértice en el origen, otro en el extremo del vector $\boldsymbol{v}$ y halle las coordenadas de los otros vértices.

4. Cuales de las siguientes cantidades son vectores y cuales son escalares.

   a) El número de estudiantes de un curso de cálculo vectorial.

   b) La cantidad de información que viaja por Internet

   c) La trayectoria seguida por un automovil que sale de Bogota a Cali.

5. Cual es la relación entre el vector $\mathbf{v} = [x_i]$ y el punto $\mathbf{p} = (x_i)$ para $i = 1, 2, ..., n$

6. Para los vectores dados $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ determine $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$, $3\mathbf{v}$, $2\mathbf{v}-5\mathbf{w}$.

   a) $v = [1,-2]$ y $w = [3,5]$

   b) $v = [0,2,3]$ y $w = [-6,1,7]$

   c) $v = [-1,-2,-3,-4]$ y $w = [2,4,6,8]$

7. Si P, Q, R, S son cuatro puntos diferentes de $\mathbb{R}^n$ determine de manera grafica.

   a) $\overline{QR} + \overline{RS}$

   b) $\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RS}$

   c) $\overline{PQ} - \overline{RS}$

8. Utilizando los vectores de la figura, trazar los siguientes vectores

   a) $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$

   b) $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$

   c) $2\boldsymbol{v}+3\boldsymbol{w}$

9. Si $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ son dos puntos de $\mathbb{R}^n$ y * una operacón definida en $\mathbb{R}^n$ tal que $\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y} = (x_i y_i)$ con $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $i = 1, 2, ..., n$. Demuestre o refute los siguientes enunciados

   a) * es conmutativa en $\mathbb{R}^n$
   b) * es asociativa en $\mathbb{R}^n$
   c) Existe elemento neutro $\boldsymbol{e}$ en $\mathbb{R}^n$ tal que para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{e} * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} * \boldsymbol{e} = \boldsymbol{x}$
   d) Para todo $\boldsymbol{x}$ existe $\boldsymbol{x}^{-1} \in \mathbb{R}^n$, tal que $\boldsymbol{x} * \boldsymbol{x}^{-1} = \boldsymbol{x}^{-1} * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}$
   e) Si $\boldsymbol{z} * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} * \boldsymbol{y}$ con $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ diferente de $\boldsymbol{e}$, entonces $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

10. Determine si el conjunto dado es un espacio vectorial.

   a) El conjunto de números reales x, y, con las siguientes operaciones, $x + y = MCD(x, y)$ y $x * y = mcm(x, y)$.
   b) El conjunto de funciones de valores reales con primera derivada continua definidas en el intervalo $[0, 1]$, con las siguientes operaciones, $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ $(\alpha f)'(x) = \alpha(f'(x))$
   c) El conjunto de matrices de 2×2 tales que $a_{11} = 1$, con la suma y el producto por escalar usual en matrices.

11. Determine si existe un espacio vectorial con exactamente.

   a) Cero elementos
   b) Un elemento
   c) Dos elementos

12. Suponga que si $\boldsymbol{u}$ es un elemento de un espacio vectorial V, demuestre que si $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} = 0$ entonces $\boldsymbol{u} = 0$

13. Es posible encontrar dos espacios vectoriales diferentes que posean el mismo elemento cero. Justifique su respuesta.

14. Uso de tecnologia (**CAS**)

   a) Grafique varios puntos en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$.
   b) Grafique varios vectores en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$

15. Utilizando un **CAS** construya la función Resultante($\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$) tal que dados $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ de $\mathbb{R}^2$ grafique $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ y $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$

1.2. Subespacios de $\mathbb{R}^n$

En está sección consideraremos subconjuntos de un espacio vectorial denominados subespacios vectoriales que conservan la estructura del espacio vectorial. Un tratamiento sin usar coordenadas de los conceptos de espacio vectorial aparecio en 1.862 en la versión del Ausdehnungslehre de .Hermann Grassmann[2], en el aparecen las ideas basicas de la teoria de espacios vectoriales incluyendo las nociones de subespacio, combinaciones lineales, independencia lineal y base.

Como todo subespacio vectorial H es un espacio vectorial debe contener al vector cero, entonces para determinar si H es subespacio vectorial, primero se debe verificar si el vector cero esta en H. Todos los espacios vectoriales poseen cierto tipo de subconjuntos que tambien son espacios vectoriales denominados subespacios vectoriales.

Si H es un subconjunto no vacio de un espacio vectorial V se dice que H es subespacio vectorial de V si:
(i) $\forall h_1, h_2 \in H, \; h_1 + h_2 \in H$
(ii) $\forall k \in \mathbb{R}, \; kh \in H$

El espacio vectorial V contiene dos subespacios 0 y V, llamados subespacios triviales. Los subespacios de V diferentes de 0 y V, se llaman subespacios propios.

Ejemplo 1.2.1 *El conjunto de todos los puntos de $\mathbb{R}^n$ con la última coordenada cero $(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y es igual a $\mathbb{R}^{n-1}$*

Ejemplo 1.2.2 *El conjunto $S_1 = \{\{x_n | n \in \mathbb{N}\} | x_n \to 1 \text{ si } n \to \infty\}$ no es subespacio vectorial de el espacio vectorial de todas las sucesiones de números reales S. La sucesión $0 = \{x_n = 0 | n \in \mathbb{N}\}$ no pertenece a S_1 pues no converge a 1. La suma de dos sucesiones convergentes a 1 es una sucesión que converge a 2. Si la sucesión $x = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ converge a 1, entonces la sucesión $y = \{-x_n | n \in \mathbb{N}\}$ no pertenece a S_1 pues converge a -1*

Sean H_1 y H_2 dos subespacios de un espacio vectorial V. Entonces $H_1 \cap H_2$ es un subespacio vectorial de V. Pero veamos que si H_1 y H_2 son dos subespacios de un espacio vectorial V, no necesariamente $H_1 \cup H_2$ es un subespacio vectorial de V.



2



Hermann Gunter Grassmann Nacio en Stettin, 15 de abril de 1809 y murio el 26 de septiembre de 1877, fue un lingüista y matemático alemán, también fue físico, humanista, erudito y editor. Evidentemente, la influencia de su padre en esta vía fue muy importante, y pudo haber llegado a ser profesor de matemáticas, pero ya se había decidido a llevar a cabo investigaciones matemáticas por su cuenta. Entre los muchos temas que abordó Grassman está su ensayo sobre la teoría de las mareas. Lo elaboró en 1840, tomando com base la teoría de la Méchanique analytique de Lagrange y de la Méchanique céleste de Laplace, pero exponiendo esta teoría por métodos vectoriales, sobre los que trabajaba desde 1832. Este ensayo, publicado por primera en los Collected Works de 1894-1911, contiene el primer testimonio escrito de lo que hoy se conoce como álgebra lineal y la noción de espacio vectorial.

Ejemplo 1.2.3 *Si* $H_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2\}$ *y* $H_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^3\}$ *son subespacios de* $\mathbb{R}^2$*,*

$H_1 \cup H_2$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$, veamos que $(2,4) \in H_1$ y que $(2,8) \in H_2$, pero $(2,4) + (2,8) = (4,12) \notin H_1 \cup H_2$ por que $(4,12) \notin H_1$ y $(4,12) \notin H_2$.

Si $v_1, v_2, ..., v_n$ son vectores de un espacio vectorial V, entonces cualquier expresión de la forma $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$, donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ se denomina combinación lineal de $v_1, v_2, ..., v_n$. Si w es una combinación lineal de $v_1, v_2, ..., v_n$, entonces esa combinación puede no ser única. Si S es el conjunto de todas las combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$,entonces S es generado por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$. Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ son vectores de un espacio vectorial V, el espacio generado por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$. El generador de un conjunto V es el mínimo número de vectores que lo genera.Es decir si se agregan vectores a un conjunto generador se obtiene otro conjunto generador. Si w es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ y cada $\mathbf{v}_i$ es combinación lineal de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k$ entonces w es combinación lineal de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k$

Ejemplo 1.2.4 *En el conjunto P_n de polinomios de grado menor o igual a n todo polinomio se puede escribir como combinación lineal de los monomios $1,\ x,\ x^2,\ ...,x^n$*

Ejemplo 1.2.5 *Verifique que si $v_1, v_2, ..., v_n$,v_{n+1} son $n+1$ vectores de un espacio vectorial V y si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$, genera a V entonces $v_1, v_2, ..., v_n$,v_{n+1} tambien genera a V.*

Sea $\boldsymbol{v} \in V$, entonces existen escalares $\alpha_1,\ \alpha_2, ..., \alpha_n$ tales que $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + ... + \alpha_n \mathbf{v}_n$

Si $\alpha_{n+1} = 0$ entonces $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + ... + \alpha_n \mathbf{v}_n + \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \mathbf{v}_{n+1}$ luego $v_1, v_2, ..., v_n$,v_{n+1} genera a V.

Propiedad 1.2.1 *Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ son vectores de un espacio vectorial V, entonces gen$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ...$ es un subespacio vectorial de V.*

Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_p\}$ y $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_p\}$ son subconjuntos de un espacio vectorial V, se dice que S y T son equivalentes si $Gen(S) = Gen(T)$

Los vectores $v_1, v_2, ..., v_n$, se dice que son linealmente independientes si ninguno de ellos es combinación lineal de los otros, en caso contrario se dice que son linealmente dependientes.

El siguiente teorema demuestra que un conjunto de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$, son linealmente independientes.

Teorema 1.2.1 *Los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ son linealmente dependientes si y sólo si existen números reales $a_1,\ a_2,\ ..., a_n$ no todos cero, tales que $a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + ... + a_n \mathbf{v}_n = 0$*

Demostración. Supongamos que $a_1 \neq 0$,
entonces $\mathbf{v}_1 = -\frac{a_2}{a_1}\mathbf{v}_2 - \frac{a_3}{a_1}\mathbf{v}_3 - ... - \frac{a_n}{a_1}\mathbf{v}_n$
por lo tanto $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ son linealmente dependientes ■

Si por el contrario $\mathbf{v}_1 = b_2\mathbf{v}_2 + ... + b_n\mathbf{v}_n$ tenemos que $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n = 0$ con $a_1 = -1 \neq 0$ y $b_i = a_i$ para $i > 1$.

Teorema 1.2.2 *Un conjunto de m vectores en $\mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente si $m > n$*

Ejemplo 1.2.6 *Si f y g son funciones de $C^1[0,1]$ y $W(f,g)(x) = \begin{vmatrix} cg(x) & g(x) \\ cg'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$ veamos que si f y g son linealmente dependientes, entonces $W(f,g)(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$.*
Supongamos que $f(x) = cg(x)$ para algun $c \in \mathbb{R}$
entonces $f'(x) = cg'(x)$ luego $W(f,g)(x) = \begin{vmatrix} cg(x) & g(x) \\ cg'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = 0$

$C^1[0,1]$ conjunto de funciones con primera derivada continua de valor real definida en el intervalo $[0,1]$ y se denomina Wronskiano de f y g.

Teorema 1.2.3 *Cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ genera a $\mathbb{R}^n$.*

La dimensión de V se denota $dimV$. La dimensión de $\mathbb{R}^n$ es igual a n.

Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base del espacio vectorial V si :
(i) $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}\}$ es linealmente independiente
(ii) $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}\}$ genera a V.

Si el espacio vectorial V tiene una base finita, entonces la dimensión de V es el número de vectores de esa base y V se llama espacio vectorial de dimensión finita. De otra forma V se llama espacio vectorial de dimensión infinita. Si $V = 0$ entonces dimensión de V es igual a cero. La dimensión de $\mathbb{R}^n$ es igual a n. La dimensión de V se nota $\dim V$. Cualquier espacio vectorial que contenga un subespacio vectorial de dimensión infinita es de dimensión infinita.

El conjunto de vectores $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,...,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,...,0)$, ..., $\boldsymbol{e}_n = (0,0,...,1)$ es un conjunto linealmente independiente, que genera a $\mathbb{R}^n$ por lo tanto constituye una base en $\mathbb{R}^n$. Esta base se denomina base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.2.7 *El conjunto $\{1, x, x^2, x^3\}$ constituye una base para P_3, llamada base canónica .*

Teorema 1.2.4 *Cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ es una base de $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 1.2.5 *Si un espacio vectorial V tiene una base de dimensión finita, entonces cualquier otra base de V tiene el mismo número de vectores.*

Propiedad 1.2.2 *Cualquier espacio vectorial V que contiene un subespacio vectorial de dimensión infinita, es de dimensión infinita.*

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y si $B = \{v_{\mathbf{1}}, v_{\mathbf{2}}, ..., v_{\boldsymbol{n}}\}$ es una base de V, entonces para cada vector $v \in V$ existen escalares c_1, c_2, ..., c_n tales que $v = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n$, luego $(c_1, c_2, ..., c_n)$ es el sistema de coordenadas del vector v relativo a la base B.

Ejemplo 1.2.8 *Utilizando la base $\{(1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}$, hallar las coordenadas de un vector (x, y, z)*

Debemos hallar escalares c_1, c_2 y c_3 tales que $(1,0,0)c_1 + (1,1,0)c_2 + (1,1,1)c_3 = (x, y, z)$

cuya solución es $(x - y,\ y - z,\ z)$

Si $B_1 = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}\}$ y $B_2 = \{\mathbf{v_1'}, \mathbf{v_2'}, ..., \mathbf{v_n'}\}$ son bases de un espacio vectorial V, en las que cada vector $\mathbf{v} \in V$ se podra expresar en dos sistemas de coordenadas. Si se conocen los vectores de la base B_2 en función de los vectores de la otra base B_1, sera posible encontrar las ecuaciones del cambo de coordenadas

$v_j' = \sum\limits_{i=1}^{n} q_{ij}v_i$ para $j = 1, 2, ..., n$,

entonces el sistema de coordenadas $(c_1, c_2, ..., c_n)$, se podra representar en función de $(c_1', c_2', ..., c_n')$ de la siguiente manera

$c_i = \sum\limits_{j=1}^{n} q_{ij}v_j'$ para $i = 1, 2, ..., n$

Matricialmente se puede expresar de la siguiente manera $X = QX'$

donde $X = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, $X' = \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_n' \end{bmatrix}$ y $Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}$

es una matriz invertible, llamada matriz de cambio de coordenadas.

Ejercicios sección 1.2.

1. Determine si el conjunto H es subespacio del espacio vectorial V .

   a) $V = P_n$, $H = \{p \in P|\, p(0) = 0\}$, P_n : Conjunto de los polinomios de grado menor o igual a n

   b) $V = C^1[0,1]$, $H = \{f \in C^1[0,1]||f'(0) = 0\}$, $C^1[0,1]$:conjunto de funciones con primera derivada continua de valor real definida en el intervalo $[0,1]$

c) $V = C[a, b]$, $H = \{f | f(x) \leq 0$, para todo $x\}$

2. Sean $V = M_{22}$ (el conjunto de matrices de 2×2) $H_1 = \{A \in M_{22} : a_{11} = 0\}$ y $H_2 = \{A \in M_{22} : \ a_{11} = -a_{22} \ , a_{12} = a_{21}\}$ Demuestre que $H_1 \cap H_2$ es subespacio de V.

3. De un ejemplo de dos subespacios vectoriales H_1 y H_2 de V, tal que $H_1 \cup H_2$ sea subespacio vectorial de V.

4. Determine si el conjunto dado de vectores genera el espacio vectorial dado.

   a) En $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$, $(1, 2), (2, 1)$

   b) En P_2, $1 - x$, $2 - x^2$

   c) En M_{22}, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. Muestre que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ estan en gen$\{\mathbf{v_1'}, \mathbf{v_2'}, ..., \mathbf{v_n'}\}$, entonces $U + V$ y αV tambien estan en gen$\{\mathbf{v_1'}, \mathbf{v_2'}, ..., \mathbf{v_n'}\}$

6. Determine si el conjunto de vectores dado es linealmente dependiente o independiente.

   a) $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$

   b) En P_2, $1 - x$, x

   c) En $C[0, 1]$, $Senx$, $Cosx$

7. Determine para que valor(es) de α son linealmente dependientes los vectores $(1, 2, 3)$, $(2, -1, 4)$ y $(3, \alpha, 4)$.

8. Considere el espacio vectorial de las funciones de variable real t. Muestre que la siguientes parejas de funciones son linealmente independientes.

   a) $1, t$

   b) e^t, t

   c) $Sent$, $Cost$

9. Demuestre que si S es linealmente independiente entonces cualquier conjunto no vacio que resulte de S eliminando vectores es linealmente independiente.

10. Encuentre una base y su dimensión, para el subespacio vectorial H dado.

    a) $H = \{(x, y, z) \colon x = 2t, \ y = t, \ z = 5t \ , t \in \mathbb{R}\}$

    b) $H = \{D \in M_{33} | D$ es diagonal$\}$

c) $H = \{p \in P_3 : p(0) = 0\}$

11. Verifique que el conjunto $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y exprese el vector (x,y,z) en terminos de esta base.

12. Para que valor(es) de α los vectores $(\alpha,1,0)$, $(1,0,\alpha)$ y $(\alpha,1,\alpha)$, constituyen una base para $\mathbb{R}^3$.

13. Encontrar las coordenadas del vector $\boldsymbol{v}$ relativo a la base S.

    a) $S = \{(2,1,0),\ (-3,-3-1),\ (-2,1.-1)\},\ \boldsymbol{v} = (4,13,-6)$.
    b) $S = \left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\},\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & -2\end{pmatrix}$
    c) $S = \{1+2x-x^2,\ 1-3x, 2\},\ \boldsymbol{v} = 3-2x^2$

14. Si $S = \{\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2', ..., \mathbf{v}_n'\}$ es una base de un espacio vectorial V y $\boldsymbol{x} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n$ y $\boldsymbol{y} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + ... + b_n\mathbf{v}_n$, vectores arbitrarios de V, encuentre las coordenadas de $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ y de $k\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{k} \in \mathbb{R})$ relativo a la base S.

15. Uso de tecnologia (**CAS**)

    a) Dependencia o independencia..
    b) Dimensión.

16. Utilizando un CAS construya una función COORDENADAS que determine las coordenadas de un vector relativo a una base.

1.3. Producto punto y ortogonalidad

Para obtener una estructura geometrica más completa de $\mathbb{R}^n$ que incluya los conceptos de distancia, ángulos y ortogonalidad, debemos dotar a $\mathbb{R}^n$ de un producto interior.

El producto interior en un espacio vectorial V es una aplicación $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$, que asocia a cada par de vectores v y w de V un número real $<v,w>$, que satiface las siguientes condiciones:

(i) $\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle \geq 0$
(ii) $\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle = \langle \boldsymbol{w},\boldsymbol{v}\rangle$
(iii) $\langle k\boldsymbol{v}+l\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}\rangle = k\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\rangle + l\langle \boldsymbol{w},\boldsymbol{u}\rangle$
Para todo $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ y $\boldsymbol{u}$ $\in V$ y $k,\ l \in \mathbb{R}$

El producto interno en $\mathbb{R}^n$ definido de la siguiente forma
$\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = v_1w_1 + v_2w_2 + ... + v_nw_n$ con $i = 1,2,...,n$ y denotado $v \bullet w$ se denomina producto punto, o producto escalar, o producto euclidiano en $\mathbb{R}^n$

Ejemplo 1.3.1 *Si* $\boldsymbol{v} = [5, 8]$ *y* $\boldsymbol{w} = [-4, 3]$, $\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{w} = (5)(-4) + (8)(3) = -20 + 24 = 4$

Todo producto interior $\langle , \rangle$ *en* V *satisface las siguientes desigualdades.*
(i) $|\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle| \leq \sqrt{\langle v, v \rangle}\sqrt{\langle w, w \rangle}$, *para todo* v, w *de* V, *desigualdad de Schwarz*
(ii) $\sqrt{\langle \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} >} \leq \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle} + \sqrt{\langle w, \boldsymbol{w} \rangle}$ *para todo* v, w *de* V, *desigualdad de Minkowski*[3].

La norma de un vector también se conoce como el módulo. A partir del producto interno la norma de $\boldsymbol{v}$ esta determinada por $\|v\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} >}$ y se denomina norma asociada al producto interior. Dos vectores son equivalentes, si tienen igual longitud, dirección y sentido.

A partir del producto interno podemos determinar la longitud o medida de un vector $v \in \mathbb{R}^n$, *denominada la norma vectorial de* v, *como una aplicación* $\|\bullet\| : V \rightarrow \mathbb{R}$, *que a cada vector* v *del espacio vectorial* V *le asocia un número real no negativo* $\|\boldsymbol{v}\|$, *que satisface las siguientes condiciones :*
(i) $\|\boldsymbol{v}\| \geq 0$
(ii) $\|k\boldsymbol{v}\| = |k| \, \|\boldsymbol{v}\|$
(iii) $\|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\| \leq \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{w}\|$
Para todo $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w} \in V$ y $k \in \mathbb{R}$

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, la norma definida de la siguiente forma $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ con $i = 1, 2, ..., n$ se denomina norma vectorial euclidiana

Ejemplo 1.3.2 *Las siguientes son normas vectoriales en* $\mathbb{R}^n$.
$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = max\{|x_i|\}$, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $\|x\|_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ *para* $i = 1, 2, ..., n$

En $C[0, 1]$ definimos el producto interior $f \bullet g = \int_a^b f(x)g(x)dx$, en particular en $C[0, 1]$ sean $f(x) = 2x$ y $g(x) = x^2$ entonces $f \bullet g = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{x^4}{2}|_0^1 = \frac{1}{2}$

3



Hermann Minkowski (22 de junio de 1864 - 12 de enero de 1909) fue un matemático alemán de origen judío que desarrolló la teoría geométrica de los números, nació en Aleksotas, Rusia (actualmente Kaunas, Lituania), y cursó sus estudios en Alemania en las universidades de Berlín y Königsberg, donde realizó su doctorado en 1885. Durante sus estudios en Königsberg en 1883 recibió el premio de matemáticas de la Academia de Ciencias Francesa por un trabajo sobra las formas cuadráticas. Impartió clases en las universidades de Bonn, Göttingen, Königsberg y Zúrich. En Zúrich fue uno de los profesores de Einstein. Minkowski exploró la aritmética de las formas cuadráticas que concernían n variables. Sus investigaciones en este campo le llevaron a considerar las propiedades geométricas de los espacios n dimensionales. En 1896 presentó su geometría de los números, un método geométrico para resolver problemas en teoría de números.

podemos determinar la norma de g por $\|g\| = \sqrt{g \bullet g}$, entonces $g \bullet g = \int_0^1 x^4 dx = \frac{x^5}{5}|_0^1 = \frac{1}{5}$, luego $\|g\| = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Una aplicación $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una distancia en $\mathbb{R}^n$ si dados $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, satisface las siguientes condiciones

(i) $d(x, y) = 0$ *si y solo si* $x = y$

(ii) $d(x, y) \geq 0$

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

(iv) $d(x, y) = d(y, x)$

Si $\boldsymbol{v}$ es un vector de $\mathbb{R}^2$ y θ el ángulo que forma $\boldsymbol{v}$ con el eje X positivo entonces $\boldsymbol{v} = [Cos\theta, Sen]$. Si $\|\boldsymbol{v}\| = 1$ el vector $\boldsymbol{v}$ se denomina unitario. Si $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{R}^n$, la aplicación $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ es una distancia en $\mathbb{R}^n$ denominada distancia euclidiana.

Ejemplo 1.3.3 *Hallar la distancia del punto* $\mathbf{p} = (2, 3, 1)$ *al punto* $\mathbf{q} = (-1, 0, 1)$.*Es equivalente a hallar la norma del vector* $\overline{\boldsymbol{pq}}$

$d(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}\| = \|(2, 3, 1) - (-1, 0, 1)\| = \|(3, 3, 0)\| = \sqrt{18}$

Teorema 1.3.1 *Sea θ el ángulo entre dos vectores* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *de* $\mathbb{R}^n$, *entonces* $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos\theta$

Demostración. Considerando un triángulo de lados **u** y **v**,

por la ley de los cosenos $\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| Cos\theta$

luego $2\|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\| Cos\theta = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\|^2 = \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \bullet (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) = 2\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v}$

Por lo tanto $\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{w} = \|\boldsymbol{v}\| \|\boldsymbol{w}\| Cos\theta$ ■

Ejemplo 1.3.4 *Calcular el ángulo positivo que forma el vector* $v = [\sqrt{3}, 1]$ *con el eje* X *positivo*

Como v no es unitario construimos un vector unitario con la misma dirección de v,

$\frac{v}{\|v\|} = \frac{[\sqrt{3}, 1]}{2} = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right]$ *luego* $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *y* $sen\theta = \frac{1}{2}$ *por lo tanto* $\theta = \frac{\pi}{6}$

Ejemplo 1.3.5 *Suponga que* $\mathbf{v}$ *es un vector fijo de longitud* 3 *y* $\mathbf{w}$ *es un vector cualquiera de longitud* 2. *Cuales son los valores máximo y mínimo de* $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}$ *y en que posiciones de* $\mathbf{v}$ *y* $\mathbf{w}$ *se dan estos resultados.* $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| Cos\theta = 3 \bullet 2Cos\theta = 6Cos\theta$.*Máximo valor es* 6 *cuando* $Cos\theta = 1$ *o sea* $\theta = 0$. *Mínimo valor es* -6 *cuando* $Cos\theta = -1$ *o sea* $\theta = \pi$

Dos vectores no nulos $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ de un espacio vectorial V se dice que son ortogonales si $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$. Un conjunto de vectores no nulos $v_{\mathbf{1}}, v_{\mathbf{2}}, ..., v_{\boldsymbol{n}}$ de V se dice que es ortogonal si $\langle v_{\boldsymbol{i}}, v_j \rangle = 0$, para $\boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j}$. Si cada vector $\boldsymbol{v_i}$ es unitario se dice que el conjunto es ortonormal. Una base ortogonal es una base formada con vectores ortogonales. Una base ortonormal es una base formada con vectores ortonormales.

Ejemplo 1.3.6 *La base canonica de* $\mathbb{R}^n$ *es un conjunto ortonormal en* $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.3.7 *Si* $\boldsymbol{v}$ *y* $\boldsymbol{w}$ *son vectores ortogonales de* $\mathbb{R}^n$ *tales que* $\|\boldsymbol{v}\| = 3$, $\|\boldsymbol{w}\| = 7$. *Calcule* $\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|$ *y* $\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|$

Como $\boldsymbol{v}$ *y* $\boldsymbol{w}$ *son ortogonales entonces* $\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{w} = 0$

y $\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|^2 = (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \bullet (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w} \bullet \boldsymbol{w} = \|\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{w}\|^2 = (3)^2 + (7)^2 = 9 + 49 = 58$,

entonces $\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\| = \sqrt{58}$ *de igual forma* $\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|^2 = (\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}) \bullet (\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}) = \|\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{w}\|^2 = (3)^2 + (7)^2 = 9 + 49 = 58$,

luego $\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\| = \sqrt{58}$

Teorema 1.3.2 *Todo conjunto ortogonal finito de vectores no nulos es linealmente independiente.*

Demostración. Supongamos que $a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + a_n\boldsymbol{v}_n = 0$ entonces para cualquier $\boldsymbol{v_i}$

$a_1(\boldsymbol{v}_1 \bullet \boldsymbol{v_i}) + \ldots + a_i(\boldsymbol{v_i} \bullet \boldsymbol{v_i}) + \ldots + a_n(\boldsymbol{v_n} \bullet \boldsymbol{v_i}) = 0 \bullet v_i = 0$

$a_1 0 + a_2 0 + \ldots + a_i\|\boldsymbol{v_i}\| + \ldots + a_n 0 = 0$

$a_i\|\boldsymbol{v_i}\| = 0$, como $\boldsymbol{v_i} \neq \boldsymbol{0}$, $\|\boldsymbol{v_i}\| > 0$ entonces $a_i = 0$ ■

Teorema 1.3.3 *Si* $B = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ *es una base de un espacio vectorial* V *con producto interior* $\langle . \rangle$, *entonces para cada un vector* $\boldsymbol{u} \in V$ *tal que* $u = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + c_n\boldsymbol{v}_n$, *con* $1 \leq i \leq n$.

(i) $c_i = \dfrac{u \bullet v_i}{v_i \bullet v_i}$ *si la base es ortogonal*

(ii) $c_i = \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v_i}$ *si la base es ortonormal*

Ejemplo 1.3.8 *Encontrar las coordenadas de* $u = (0,1,2,3)$ *en* $\mathbb{R}^4$ *relativas a la base ortogonal* $B = \{(1,1,1,1), (-1,-1,1,1), (-1,1,-1,1), (-1,1,1,-1)\}$

Como $c_i = \dfrac{u \bullet v_i}{v_i \bullet v_i}$ *y* $\boldsymbol{v_i} \bullet \boldsymbol{v_i} = 4$ *para* $i = 1,2,3,4$,

calculamos $u \bullet v_1 = (0,1,2,3) \bullet (1,1,1,1) = 6$ *enonces* $c_1 = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$,

$\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v_2}$=$(0,1,2,3) \bullet (-1,-1,1,1) = 4$ *,enonces* $c_2 = 1$,

$\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v_3} = (0,1,2,3) \bullet (-1,1,-1,1) = 2$, *entonces* $c_3 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v}_4 = (0,1,2,3) \bullet (-1,1,1,-1) = 0$,*entonces* $c_4 = 0$,

por lo tanto $u = \dfrac{3}{2}v_1 + v_2 + \dfrac{1}{2}v_3$

Propiedad 1.3.1 *Proyección de un vector en otro vector*

Si $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son vectores no nulos de $\mathbb{R}^n$, entonces la proyección de $\boldsymbol{v}$ en $\boldsymbol{w}$ es un vector con la dirección de $\boldsymbol{w}$ igual a $\Pr oy_w v = \dfrac{v \bullet w}{\|w\|^2} w$

Tambien es igual a $\Pr oy_w v = \dfrac{v \bullet w}{w \bullet w} w$

Ejemplo 1.3.9 *La proyección del vector* $\boldsymbol{v} = [2, -6]$ *sobre el vector* $\boldsymbol{w} = [1, 3]$ *es igual a* $\Pr oy_w v = -\frac{16}{10}[1, 3] = \left[-\frac{8}{5}, -\frac{24}{5}\right]$

Propiedad 1.3.2 *Sean* $\boldsymbol{v}$ *y* $\boldsymbol{w}$ *vectores no nulos de* $\mathbb{R}^n$, *entonces*
(i) $\Pr oy_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} = 0$ *si* $\boldsymbol{v}$ *y* $\boldsymbol{w}$ *son ortogonales*
(ii) $\Pr oy_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$ *es paralelo a* $\boldsymbol{w}$
(iii) $\boldsymbol{v} - \Pr oy_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$ *es ortogonal a*

Un vector v se puede expresar como la suma de un vector paralelo a un vector u y un vector ortogonal a u, de la siguiente manera $v = proy_u v + (v - proy_u v)$

Ejemplo 1.3.10 *Exprese el vector* $v = [2, 1, -3]$ *como la suma de un vector paralelo a* $u = [3, -1, 0]$ *y un vector ortogonal a* u.

Como $u \bullet v = 5$ *y* $u \bullet u = 10$ *entonces* $proy_u v = \frac{5}{10}[3, -1, 0] = \left[\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right]$,
$v - proy_u v = [2, -1, -3] - \frac{5}{10}[3, -1, 0] = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -3\right]$ *luego* $[2, 1, -3] = \left[\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right] + \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -3\right]$

Ejercicios 1.3.

1. Determine cual de los siguientes puntos $\boldsymbol{p} = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{q} = (2, -1, 5)$, $\boldsymbol{r} = (0, 3, -6)$ y $\boldsymbol{s} = (8, 5, -2)$

   a) Esta mas cerca del eje $\boldsymbol{y}$.

   b) Esta mas lejos del eje $\boldsymbol{x}$

   c) Esta mas lejos del origen

2. Calcule el producto interior entre los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$

   a) $\boldsymbol{u} = [3, 4]$ y $\boldsymbol{v} = [2, -3]$

   b) $\boldsymbol{u} = [12, 3]$ y $\boldsymbol{v} = [-1, 5]$

   c) $\boldsymbol{u} = [2, -1, 1]$ y $\boldsymbol{v} = [-1, 0, 2]$

3. Si $\boldsymbol{v}$ es el vector que va de $(0, 0)$ a $(3, 4)$ y $\boldsymbol{w}$ el vector que va de $(2, 1)$ a $(5, 5)$. Demuestre que $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$

4. Demuestre que $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ define un producto interno en $C[a,b]$.

5. Para el producto interno definido en el ejercicio anterior si $f(x) = x$ y $g(x) = Senx$ en $C[0, 2\pi]$ halle

a) $\langle f, g \rangle$
b) $\|f\|$
c) $\|g\|$

6. Hallar un vector $\boldsymbol{v}$ de longitud dada, con la misma dirección del vector $\boldsymbol{u}$.

   a) $\|\boldsymbol{v}\| = 3$ y $\boldsymbol{u} = [1, 1]$
   b) $\|\boldsymbol{v}\| = 2$ y $\boldsymbol{u} = [3, \sqrt{3}]$
   c) $\|\boldsymbol{v}\| = 6$ y $\boldsymbol{u} = [1, -1, -1]$

7. Demuestre que $\|\boldsymbol{x}\| = max\{|x_i|\}$ es una norma en $\mathbb{R}^n$.

8. Para que valor(es) de α los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son ortogonales.

   a) $\boldsymbol{u} = [3, 4]$ y $\boldsymbol{v} = [1, \alpha\,]$
   b) $\boldsymbol{u} = [-2, 1]$ y $\boldsymbol{v} = [\alpha\,, -2]$
   c) $\boldsymbol{u} = [-1, -1]$ y $\boldsymbol{v} = [\alpha\,, 5]$

9. Demuestre que si $\boldsymbol{v}$ es ortogonal a $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{w}$, entonces $\boldsymbol{v}$ es ortogonal a $\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{w}$ para cualesquiera α y β.

10. Para que valor(es) de α el ángulo entre $\boldsymbol{v} = [2, -5]$ y $\boldsymbol{u} = [\alpha, 1]$ es igual a

    a) $\dfrac{\pi}{3}$
    b) $\dfrac{\pi}{4}$
    c) $\dfrac{2\pi}{3}$

11. Halle el ángulo formado por la diagonal de un cubo y una de sus aristas.

12. Hallar la proyección de $\boldsymbol{u}$ en $\boldsymbol{v}$

    a) $\boldsymbol{u} = [2, 3]$ y $\boldsymbol{v} = [5, 1]$
    b) $\boldsymbol{u} = [2, 2]$ y $\boldsymbol{v} = [5, 0]$
    c) $\boldsymbol{u} = [2, 1, 2]$ y $\boldsymbol{v} = [0, 3, 4]$

13. Para las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = Senx$ en $C[0, 2\pi]$ halle

    a) $\text{Proy}_g f$
    b) $\text{Proy}_f g$
    c) $\text{Proy}_f f$

14. Si $\|v\| = 3$ y $-2 < s < 1$ determine $\|sv\|$
15. Uso de tecnologia (CAS)
    a) Producto punto
    b) Norma
    c) Distancia.
16. Utilizando un **CAS** construya una función llamada $proyeccion(u, v)$ que determine la proyección de u en v.

1.4. Transformaciones lineales y matrices

En esta sección introducimos una clase importante de aplicaciones entre espacios vectoriales, aquellas que son lineales. Ya que una de las ideas centrales del cálculo multivariado es la aproximación no lineal por medio de aplicaciones lineales. En el año 1.918 en Space-time-Matter Hermann Weyl[4] dio la definición abstracta de transformación lineal.

Dados V y W dos espacios vectoriales y T una aplicacion de V en W , se dice que T es una transformación lineal si y solamente si :

(i) $\forall \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V \quad T(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = T(\boldsymbol{v}_1) + T(\boldsymbol{v}_2)$

(ii) $\forall \boldsymbol{v} \in V$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R} \;\; T(\alpha \boldsymbol{v}) = \alpha T(\boldsymbol{v})$

Ademas se cumplen las siguientes propiedades

(i) $T(\mathbf{0_V}) = \mathbf{0_W}$

(ii) $\forall \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V \;\; T(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = T(\boldsymbol{v}_1) - T(\boldsymbol{v}_2)$

(iii) $\forall \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n \in V \quad T(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + ... + \boldsymbol{v}_n)$

Ejemplo 1.4.1 *Sea $C[a, b]$ el conjunto de todas las funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ y sea $C^{(1)}[a, b]$ el conjunto de todas las funciones continuas con primera derivada continua en el intervalo $[a, b]$, entonces la aplicación $T : C[a, b] \to C^{(1)}$, definida por $T(f) = f'$ es lineal, ya que $T(f + g) = (f + g)' = f' + g'$ y $T(\alpha f) = (\alpha f)' = \alpha f'$.*

[4]



Hermann Weyl (1.885-1.955) Nacido: 9 de Noviembre de 1885 en Elmshorn (cerca de Hamburgo), Alemania. Fallecido: 8 de Diciembre de 1955 en Zürich, Suiza, fue educado en las Universidades de Munich y Göttingen, obtuvo su doctorado en esta última, bajo la supervisión de David Hilbert. Después de presentar su tesis doctoral, 'Singuläre Integralgleichungen mit besonder Berücksichtigung des Fourierschen Integraltheorems', le fue concedido el título en 1908. Fue en el mismo Göttingen donde él desempeñó su primer cargo docente. Matemático y fisico autor de importantes investigaciones sobre la teoria de las ecuaciones integrales y diferenciales, en el campo de la relatividad y la mecanica cuantica. En el año 1.918 en Space-time-Matter dio la definición abstracta de transformación lineal.

Ejemplo 1.4.2 *Sea $M_{n\times n}$ el conjunto de las matrices de $n\times n$, entonces la aplicación $T: M_{n\times n}\to\mathbb{R}$, definida por $T(A)=\det(A)$ no es lineal, ya que de manera general el determinante de una suma no es la suma de los determinantes.*

Las transformaciones lineales se denominan tambien operadores lineales si $V=W$. El núcleo de la transformación T, denotado por $Ker\ T$, es el conjunto de vectores $\boldsymbol{v}_i\in V$ cuya imagen es $\mathbf{0}\in W$, y la imagen de la transformación T, denotada por $\operatorname{Im} T$, es el conjunto de vectores $\boldsymbol{w_j}\in W$ tales que $\boldsymbol{w_j}=T(\boldsymbol{v_i})$ para algun $\boldsymbol{v_i}\in V$.

Es decir $KerT=\{v_i\in V|T(v_i)=0_W\}$ y $\operatorname{Im} T=\{w_j\in W|T(v_i)=w_j$, para $v_i\in V\}$

Ejemplo 1.4.3 *Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $T(1,0)=(2,7)$ y $T(0,1)=(-3,2)$, halle una expresión general para $T(x,y)$.*

Como T es lineal $T(x,0)=xT(1,0)=x(2,7)=(2x,7x)$
y $T(0,y)=yT(0,1)=y(-3,2)=(-3y,2y)$,
entonces $T(x,y)=T(x,0)+T(0,y)=(2x-3y,7x+2y)$

A la dimensión del nucleo de T se le llama nulidad de T, y a la dimensión de su imagen se le llama rango de T.

Teorema 1.4.1 *Nulidad y rango de una transformación lineal. Si T es una transformacion lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$. Entonces*
(i) Nulidad de $T=\nu(T)=\dim(\ker T)$
(ii) Rango de $T=\rho(T)=\dim(\operatorname{Im} T)$

El siguiente teorema relaciona la nulidad y el rango de una transformación lineal $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, con la dimensión del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$

Teorema 1.4.2 *Sea $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ una transformación lineal, entonces $dim(Ker)+dim(Im)=n$*

Veremos ahora que dada cualquier transformación lineal T de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ existe una matriz A de $m\times n$ tal que $T(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$. Tomando la base canonica de $\mathbb{R}^n$ tenemos que los vectores $T(\boldsymbol{e_i})$ determinan las columnas de la matriz A.

Teorema 1.4.3 *Sea $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ una transformación lineal, entonces existe una única matriz A_T de $m\times n$ tal que $T(x)=A_Tx$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$*

Demostración. Por contradicción supongamos que existe una matriz B de $m\times n$ tal que $T(\boldsymbol{x})=B\boldsymbol{x}$,

por lo tanto $A_T\,\boldsymbol{x}=B\boldsymbol{x}$, luego $A_T\boldsymbol{x}-B\boldsymbol{x}=(A_T-B)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ donde $\mathbf{0}$ es la matriz columna nula para todo $\boldsymbol{x}$

entonces $(A_T-B)\boldsymbol{e}_i=\mathbf{0}$ para todo $i=1,2,...,n$, por lo tanto la columna i-esima de A_T-B es $\mathbf{0}$, para todo i,

entonces A_T-B es la matriz cero de $m\times n$ de esta manera $A_T=B$ ∎

Ejemplo 1.4.4 *Para la transformación lineal* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, *determinada por* $T(x, y, z) = (x + y, y + z)$ *determine su matriz* A_T.

Para obtener A_T *primero se halla* $T(\boldsymbol{e}_i)$ *para* $i = 1, 2, 3$,

con estos vectores como columna se construye la matriz, luego $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $n = m$ se denomina operador lineal. Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un operador lineal, se dice que el número real λ es un valor propio de T si existe un vector no nulo $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $T(v) = \lambda v$. Al vector v se le denomina vector propio de T asociado al valor propio λ. Si A es una matriz cuadrada de orden n, su polinomio carateristico esta determinado por $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, $p(\lambda)$ es un polinomio en variable λ de grado n. Los valores propios de una matriz cuadrada A de orden n son las raices de su polinomio carateristico $p(\lambda)$. Si A es una matriz cuadrada de orden n y v es un vector no nulo de $\mathbb{R}^n$ tal que $Av = \lambda v$ entonces v es un vector propio de A. Para calcular valores y vectores propios primero se encuentra $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, luego se hallan sus raices y por último se resuelve el sistema homogéneo $(A - \lambda_i)v = 0$.

Ejemplo 1.4.5 *Para la matriz* $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ *encuentre su polinomio característico y sus valores y vectores propios.*

Hallamos primero el polinomio característico $p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 3 \\ 5 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 12$, *los valores propios de* A *son las raices de* $p(\lambda)$, *o sea* 2 *y* 6.

Para hallar los vectores propios se resuelve el sistema homogéneo $(A - \lambda I)v = 0$ *para cada* λ,

si $\lambda = 2$ *entonces el sistema* $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *tiene por solución* x_1=-$\frac{3}{5}x_2$,*luego si* $x_2 = 1$

entonces $x_1 = -\frac{3}{5}$,*entonces* $v_1 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$

y si $\lambda = 6$ *entonces el sistema* $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *tiene por solución* $x_1 = x_2$,

luego si $x_2 = 1$ *entonces* $x_1 = 1$,*entonces* $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ejercicios 1.4

1. Demuestre que la transformación dada es lineal

   a) $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$, tal que $T(x, y, z) = [x, y, 0]$, proyección.

   b) $T : M_{mn} \to M_{nm}$, tal que $T(A) = A^t$ Transposición.

c) $T:\mathbb{R}\rightarrow P_3$, tal que $T(a)=a+ax+ax^2+ax^3$

2. Demuestre que la transformación dada no es lineal.

   a) $T:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$, tal que $T(x,y,z)=xyz$
   b) $T:C[0,1]\rightarrow C[0,1]$, tal que $T(f)=f^2$
   c) $T:C[0,1]\rightarrow\mathbb{R}$, tal que

3. Sea $T:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que : $T(1,0)=(2,-1,5)$ y $T(0,1)=(3,2,-5)$. Halle una expresión general para $T(x,y)$.

4. Demuestre que si T_1 y T_2 son dos transformaciones lineales de V en W,entonces T_1+T_2 es una transformación lineal de V en W.

5. Encuentre la nulidad y el rango de la transformación lineal dada.

   a) $T:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$, $T(x,y)=x+y$
   b) $T:M_{nn}\rightarrow M_{nn}$, $T(A)=A^t+A$
   c) $T:\mathbb{R}\rightarrow P_2$, $T(k)=k+kx+kx^2$

6. Si T:$V\rightarrow W$ es una transformación lineal, en donde dimension de V es igual a n, demuestre que nulidad(t)+rango(t) $=n$

7. Obtenga la matriz A_T, que represente la transformación dada.

   a) $T:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$, tal que $T(x,y)=(ax+by,cx+dy)$, con a,b,c y d números reales.
   b) $T:P_2\rightarrow P_3$, tal que $T(p)=xp(x)$
   c) $T:M_{mn}\rightarrow M_{nm}$, tal que $T(A)=A^t$

8. Dada la matriz A_T encuentre el valor de la transformación lineal T en el vector indicado.

   a) $A_T=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$, $T(2,3)$
   b) $A_T=\begin{pmatrix}7&5\\-10&-8\end{pmatrix}$, $T(-1,-1,-1)$
   c) $A_T=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&1\\3&0&-1\end{pmatrix}$, $T(1,2,3)$

9. Para la matriz A dada determine su polinomio característico y sus valores y vectores propios.

a) $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. Demuestre que el termino independiente del polinomio caracteristico de la matriz A, es $\det A$.

11. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal y si $u \in V$ es combinación lineal de $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{V}$ entonces $T(u) \in W$ es una combinación lineal de $T(\boldsymbol{v}_1), T(\boldsymbol{v}_2), ..., T(\boldsymbol{v}_n)$

12. Demostrar que $T(x, y) = [e^x, e^y]$ no es lineal.

13. Uso de tecnologia (**CAS**).

    a) Polinomio caracteristico

    b) Valores propios

    c) Vecores propios

14. Utilizando un **CAS** construya una funciòn MATRA que determine la mariz de una transformaciòn lineal.

1.5. Producto vectorial, rectas y planos.

En el plano $\mathbb{R}^2$ se utiliza el concepto de pendiente para hallar la ecuación de una recta, a partir de dos puntos diferentes sobre ella. En el espacio tambien puede hallarse la ecuación de una recta si se conocen dos puntos diferentes sobre ella, pero ahora se utiliza el concepto de dirección (dada por un vector[5] $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^3$ no nulo) .



[5]



William Rowan Hamilton (1805-1865), matemático y astrónomo británico, conocido sobre todo por sus trabajos en análisis de vectores y en óptica. Nació en Dublín y estudió en el Trinity College. En 1827, sin haber obtenido su título, fue nombrado profesor de astronomía, y al año siguiente astrónomo real para Irlanda. Hamilton pasó el resto de su vida trabajando en el Trinity College y en el observatorio de Dunsink, cerca de Dublín. En el campo de la dinámica, introdujo las funciones de Hamilton, que expresan la suma de las energías cinética y potencial de un sistema dinámico; son muy importantes en el desarrollo de la dinámica moderna y para el estudio de la teoría cuántica.

El producto exterior, cruz o vectorial en R^3*, es una función de* $R^3 \times R^3$ *en* R^3*, que a cada par de vectores* v *y* w *de* R^3 *les asocia un vector* $v \times w$ *que satisface las siguientes condiciones*

(*ii*) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$

(*iii*) $(k\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{v} = k(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$

(*iv*) $\boldsymbol{u} \times (k\boldsymbol{v} + l\boldsymbol{w}) = k(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) + l(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w})$

Para todo $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ y $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ y k, $l \in \mathbb{R}$.

Algebraicamente $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = [v_2w_3 - v_3w_2,\ v_3w_1 - v_1w_3\ , v_1w_2 - v_2w_1]$, $\boldsymbol{v} = [v_1, v_2, v_3]$ y $\boldsymbol{w} = [w_1, w_2, w_3]$

Ejemplo 1.5.1 *Si* $v = [2, 3, -1]$ *y* $w = [1, -2, 1]$ *entonces* $v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$ $[-1, -1, -1]$

Dos vectores no nulos $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ de $\mathbb{R}^3$se dice que son paralelos si $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$.

Teorema 1.5.1 *Sea* θ *el ángulo entre dos vectores* u *y* v *de* $\mathbb{R}^3$ *entonces* $\|u \times v\| = \|u\|\,\|v\|\, sen\theta$.

El área de un paralelogramo que tiene lados adyacentes $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ es igual a $\|u \times v\|$. Si $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son tres vectores que no estan en el mismo plano, entonces forman los lados de un paralelepipedo cuya base es un paralelogramo de área $\|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}\|$ entonces el volumen del paralelepipedo es igual a $|(u \times \boldsymbol{v})\boldsymbol{w}|$

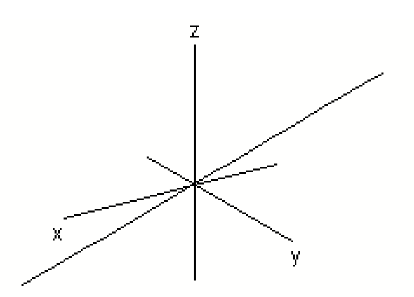
Ejemplo 1.5.2 *Calcule el volumen del paralelepipedo determinado por los vectores* $[1, -1, 0]$, $[3, 2, 0]$ *y* $[0, -7, 3]$.

Haciendo $u = [1, -1, 0], v = [3, 2, 0]$ *y* $w = [0, -7, 3]$

$$u \times v = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = [-1, 0, 5],\ \textit{luego}\ |(u \times \boldsymbol{v})\boldsymbol{w}| = |[-1, 0, 5][0, -7, 3]| = 15$$

Si $p = (x_1, y_1, z_1)$ y $q = (x_2\ , y_2, z_2)$ son dos puntos diferentes de una recta L, entonces el vector $\boldsymbol{v} = pq = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1] = [a, b, c]$ es un vector contenido en la recta L, llamado vector director de la recta y si $r = (x,\ y,\ z)$ es un punto cualquiera de L, entonces $\boldsymbol{v} = \ || \, pr$ luego $t\boldsymbol{v} = pr$ $(t \in \mathbb{R})$, por lo tanto $0r = 0p + t\boldsymbol{v}$ determina la ecuación vectorial de la recta L . Tambien se puede escribir como $or = op + t(oq - op)$. Por igualdad de vectores $x = x_1 + ta$, $y = y_1 + tb$, $z = z_1 + tc$ determinan las ecuaciones paramétricas de la recta L. Si a, b *y* c son diferentes de cero $\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$ determinan las ecuaciones simétricas de la recta L.

El conjunto de puntos (x, y, z) obtenidos para valores de t en el intervalo $[0, 1]$ determina el segmento de recta que une el punto $\mathbf{p}$ con el punto $\mathbf{q}$.



Ejemplo 1.5.3 *Hallar las ecuación de la recta* L *que pasa por los puntos* $p = (1, 3, 4)$ *y* $q = (2, 1, -1)$

El vector $\boldsymbol{v} = pq = [1, -2, -5]$ *es director de la recta* L *,*
luego $[x, y, z] = [1, 3, 4] + t[1, -2, -5]$ *es la ecuación vectorial de* L*,*
y $x = 1 + t$*,* $y = 3 - 2t$*,* $z = 4 - 5t$ *son las ecuaciones parametricas de* L
y $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-4}{-5}$ *son las ecuaciones simétricas de* L

Teorema 1.5.2 *Demostrar que el conjunto* $H = [(x, y, z)|x = at,\ y = bt,\ z = ct$ *con* $a, b, c \in \mathbb{R}\}$ *es subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^3$*.*

Demostración. H consta de los vectores de $\mathbb{R}^3$ que estan sobre una recta que pasa por el origen,

sean $\boldsymbol{v}_1 = (at_1, bt_1, ct_1) \in H$ y $\boldsymbol{v}_2 = (at_2, bt_2, ct_2) \in H$

entonces $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (a(t_1+t_2), b(t_1+t_2), c(t_1+t_2)) \in H$ y $k\boldsymbol{v}_1 = (k(at_1), k(bt_1), k(ct_1)) \in H$,

luego H es subespacio vectorial propio de $\mathbb{R}^3$. ■

Dos rectas L_1 y L_2 de $\mathbb{R}^3$, se dicen que son sesgadas si no se intersectan y no son paralelas. Si L_1 y L_2 son dos rectas de $\mathbb{R}^3$, entonces: L_1 es paralela a L_2 si sus vectores directores son paralelos, L_1 es ortogonal a L_2 si sus vectores directores son ortogonales.y el ángulo entre L_1 y L_2 es igual al ángulo entre sus vectores directores.

Ejemplo 1.5.4 *Halle el punto intersección entre las rectas* $L_1 : x - 1 = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z+2}{-1}$ *y* $L_2 : \dfrac{x-17}{3} = y - 4 = \dfrac{z+8}{-1}$.

Utilizando la ecuación paramétrica de las rectas $L_1 :\ x = 1+t,\ \ y = -3+2t,\ \ z = -2-$ *y* $L_2 :\ x = 17 + 3s,\ \ y = 4 + s,\ z = -8 - s$

Igualando $x, y\, y\, z$ *tenemos* $-2 - t = -8 - s$*, resolviendo el sistema* $s = -5$ *y* $t = 1$*,*
luego $x = 2,\ \ y = -1,\ z = -3$ *por lo tanto el punto intersección es* $2, -1, -3)$

Teorema 1.5.3 *La distancia entre una recta L y un punto q (que no esta en L) esta determinada por $d = \dfrac{\|pq \times v\|}{\|v\|}$ donde **v** es el vector director la recta L y p es un punto cualquiera de L.*

Demostración. Sea d la distancia entre q y la recta dada,.

entonces $d = \|pq\|\, sen\theta$ donde θ es el ángulo entre $\boldsymbol{v}$ y pq.

Luego $\|v\|\, \|pq \times v\|\, sen\theta = \|pq \times v\|$.

Por lo tanto $d = \|pq\|\, sen\theta = \dfrac{\|pq \times v\|}{\|v\|}$. ■

Ejemplo 1.5.5 *Calcular la distancia entre el punto $q = (10, 3, -2)$ y la recta $x = 4 - 2t$, $y = 3 + t$ y $z = 1 + 5t$.*

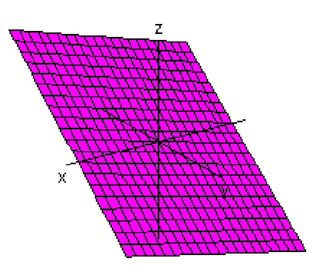
El vector director de la recta es $v = [-2, 1, 5]$,haciendo $t = 0$ hallamos un punto p de la recta,

$p = (4, 3, 1)$ *y* $pq = [6, 0, -7]$ *entonces* $pq \times v = [7, -16, 6]$ *por lo tanto* $d = \dfrac{\|[7, -16, 6]\|}{\|[-2, 1, 5]\|} = \dfrac{\sqrt{341}}{\sqrt{30}}$

Una recta L de $\mathbb{R}^n$ que pasa por el punto $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ y cuyo vector director es $v = [v_1, v_2, ..., v_n]$ esta determinada por el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tales que:

$x = p + tv$, $t \in \mathbb{R}$, determina la ecuación vectorial de L y $x_i = p\acute{} + tv_i$ para $i = 1, 2, ..., n$ determina las ecuaciones paramétricas de L

Si $p = (x_o, y_o, z_o)$ es un punto y $\boldsymbol{n} = [a, b, c]$ un vector dado no nulo, entonces el conjunto de puntos $q = (x, y, z)$ tales que $pq \bullet \boldsymbol{n} = 0$ determina un plano, luego $[x - x_o, y - y_o, z - z_o] \bullet [a, b, c] = 0$ realizando el producto punto obtenemos la ecuación general de un plano $ax + by + cz = d$ donde $d = ax_o + by_o + cz_o$, el vector $\boldsymbol{n}$ se denomina vector normal del plano.



Ejemplo 1.5.6 *Si* $p = (0, 0, 0)$, $q = (1, 2, 3)$ *y* $r = (-2, 3, 3)$ *construimos los vectores* pq *y* pr, $pq = [1, 2, 3]$, $pr = [-2, 3, 3]$ *para obtener un vector normal al plano hacemos*

$$\boldsymbol{n} = pq \times pr = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = [-3,-9,7], \text{ luego } \ [x+2, y-3, z-3] \bullet [-3,-9,7] = 0$$

Si π_1 y π_2 son dos planos, entonces: π_1 es paralelo a π_2 si sus normales son paralelas. π_1 es ortogonal a π_2 si sus normales son ortogonales. El ángulo entre π_1 y π_2 es igual al ángulo entre sus normales.

Ejemplo 1.5.7 *Encuentre todos los puntos intersección entre los plano $x - y + z = 2$ y $2x - 3y + 4z = 7$.*

Las coordenadas de cualquier punto (x, y, z) sobre la recta intersección de estos dos planos deb las ecuaciones

$x - y + z = 2$ y $2x - 3y + 4z = 7$. Resolviendo el sistema obtenemos $x = -1 + z$, $y = -3 + 2z$, z

cualquier valor Si $z = t$ obtenemos la ecuación paramétrica de la recta intersección $x = -1 - t$, $y = -3 + 2t$, y $z =$

Teorema 1.5.4 *La distancia entre un plano π y un punto q (que no esta en π) esta determinada por $d = \dfrac{|pq \bullet n|}{\|n\|}$, donde n es la normal del plano y p es un punto del plano.*

Demostración. La distancia entre q y el plano π es igual a la norma de la proyección de pq en la normal $\boldsymbol{n}$,

entonces si $q = (x_0, y_0, z_0)$ y $ax + by + cz = d$ es la ecuación del plano
entonces encontramos un punto q del primer plano haciendo $x = 0$ y $z = 0$
entonces $y = -6$, la normal del segundo plano es $[6, -2, 4]$ y $d = 6$
luego $d = \dfrac{0 + 12 + 0}{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \dfrac{12}{\sqrt{56}} = \dfrac{3\sqrt{14}}{7}$ ■

Ejercicios 1.5

1. Calcule el producto exterior entre los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$

   a) $\boldsymbol{u} = [3, 4, 1]$ y $\boldsymbol{v} = [2, -3, 0]$

   b) $\boldsymbol{u} = [12, 3, 0]$ y $\boldsymbol{v} = [-1, 5, -2]$

   c) $\boldsymbol{u} = [2, -1, 1]$ y $\boldsymbol{v} = [-1, 0, 2]$

2. Demuestre que si θ es el ángulo entre dos vectores $\boldsymbol{u}$ *y* $\boldsymbol{v}$ de $\boldsymbol{R}^3$, entonces $\|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}\| = \|\boldsymbol{v}\| \, \|\boldsymbol{w}\| \, Sen\theta$

3. Suponga que $\boldsymbol{u}$ es un vector fijo de longitud 3 en dirección del eje $\boldsymbol{x}$ positivo y $\boldsymbol{v}$ es un vector cualquiera en el plano $\boldsymbol{xy}$ de longitud 2.

   a) Cuales son los valores máximos y mínimos de $\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|$
   b) Que dirección toma $\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|$ a medida que v gira

4. Si $u + v + w = 0$ demuestre que $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}$

5. Hallar la ecuación de la recta con las condiciones dadas.

   a) Pasa por el punto $p = (2, 1, 1)$ y un vector director es el vector pq donde $q = (3, 4, -2)$
   b) Pasa por el punto $(2, 1, 4)$ y es paralela a la recta $x = 3t$, $y = 2+4t$ y $z = -2t$
   c) Pasa por el origen y es perpendicular a la recta $x = 2+t$, $y = 1-t$ y $z = -3t$

6. Halle la distancia del origen a la recta dada.

   a) $x = 3t$, $y = 2 + 6t$ y $z = 1 + t$
   b) Pasa por los puntos $p = (1, -1, 3)$ y $q = (2, 4, -5)$

7. Halle la distancia entre las rectas

   a) L_1: y L_2 :

8. Demuestre que la recta que pasa por los puntos (2,−1,−5) y (8,8,7) es paralela a la recta que pasa por los puntos (4,2,−6) y $(8, 8, 2)$

9. Halle la ecuación del plano con las condiciones dadas.

   a) Pasa por el punto $p = (2, 5, 6)$ y es paralelo al plano XZ
   b) Pasa por el origen y es perpendicular al plano $4x - y + z = 9$
   c) Pasa por los puntos $p = (1, 1, 0)$ y $q = (3, 2, 4)$, y el vector $\boldsymbol{v} = [7, -1, -3]$ es paralelo a el.

10. Halle la distancia entre los dos planos

    a) $\pi_1 : 2x - y + 3z = 4$ y $\pi_2 : 4x - 2y + 6z = 5$

11. Verifique que la recta se encuentra contenida en los planos $\pi_1 : 5x + y + z = 0$ y $\pi_2 : 2x + 3y - 2z = -5$

12. Halle el punto intersección entre el plano $2x - 2y + z = 12$ y la recta

13. Encuentre el áangulo entre los planos $\pi_1 : x - y + z = 2$ y $\pi_2 : 2x - 3y + 4z = 7$

14. Determine dos planos diferentes cuya intersección es la recta $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 3 + 2t$

15. Uso de tecnologia (CAS)

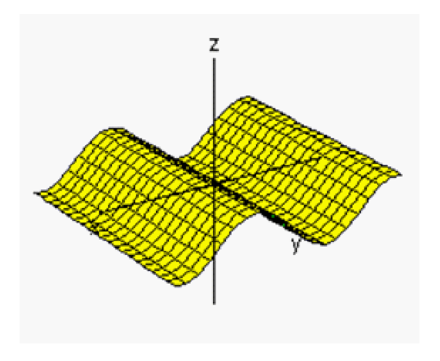
    a) Producto vectorial
    b) Grafique las siguientes rectas
    c) Grafique los siguientes planos.

16. Utilizando un CAS construya una funciòn llamada DISTPR distancia de un punto a una recta.

1.6. Superficies

En la sección anterior se consideraron las primeras superficies denominadas planos, en esta sección consideraremos los tipos más particulares de superficies, como conjuntos de puntos (x, y, z) que satisfacen una ecuación cartesiana y cuya intersección con un plano en la mayoría de los casos es una cónica de Apolonio[6].

Una superficie generada por una recta (generatriz) que se mueve a lo largo de una curva plana (directriz) se denomina cilindro. La recta no está contenida en el mismo plano que contiene la curva.



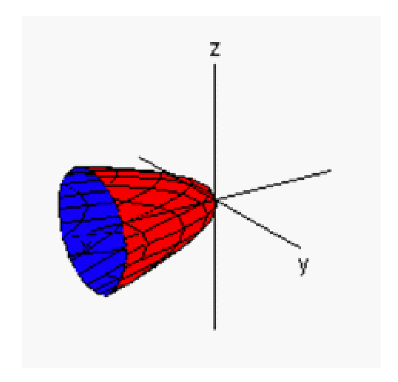
6



APOLONIO DE PERGA Nació : Alrededor del 262 A.C. en Perga, Grecia Ionia (Ahora Turquía). Falleció alrededor del 190 A.C en Alejandría, Egipto. Apolonio fue conocido como "El gran geómetra". Su famoso libro "Secciones Cónicas" introdujo los términos: parábola, elipse e hipérbola espiral. Estudió en Alejandría y luego visitó Pérgamo en donde han sido construidas una biblioteca y una universidad semejantes a la de Alejandría. Mientras, Apolonio, "El gran geómetra", estuvo en Perga, escribió la primera edición de su famoso libro "Secciones Cónicas", que consta de 8 libros. Hubo otras aplicaciones hechas por Apolonio, usando su conocimiento sobre los conos, para resolver problemas prácticos. Desarrolló el hemiciclo, un reloj solar que marcaba las líneas de las horas en la superficie de una sección cónica proporcionando mayor precisión.

Propiedad 1.6.1 *Para cilindros*

En el espacio la gráfica de una ecuación en dos variables de las tres variables x, y y z es un cilindro, cuyas generatrices son paralelas al eje de la variable que no aparece.
(1) Cilindro circular recto, si la directriz es un circulo
(2) Cilindro parabólico, si la directriz es una parabola
(3) Cilindro elíptico, si la directriz es una elipse
(4) Cilindro hiperbólico, si la directriz es una hipérbola
Una superficie generada por una curva plana (generatriz) que gira alrededor de una recta fija (eje),que esta en el mismo plano de la curva, se denomina superficie de revolución.



Si se gira la gráfica de una función (radio) alrededor de uno de los ejes coordenados, entonces la ecuación de la superficie de revolución resultante tiene una de las siguientes formas.
(a) $y^2 + z^2 = (r(x))^2$ Si el giro es alrededor del eje X
(b) $x^2 + z^2 = (r(y))^2$ Si el giro es alrededor del eje Y
(c) $x^2 + y^2 = (r(z))^2$ Si el giro es alrededor del eje Z

Propiedad 1.6.2 *Clasificación de las superficies de revolución según su generatriz*

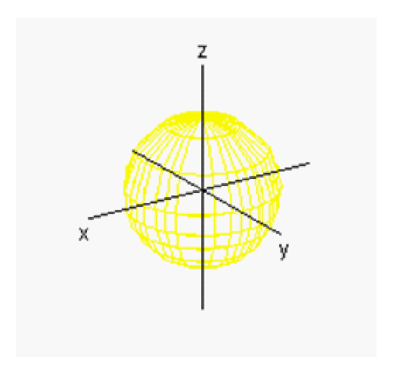
(1) Paraboloide de revolución, si la generatriz es una parabola
(2) Elipsoide de revolución, si la generatriz es una elipse
(3) Hiperboloide de revolución, si la generatriz es una hiperbola

Ejemplo 1.6.1 *Hallar la ecuación de la superficie de revolución generada al girar la curva $z = x^2$ alrededor del eje Z. Trace la gráfica*
El radio es $r = x$, luego los circulos son de la forma $x^2 + y^2 = r^2$
entonces como $x = \sqrt{z}$ la ecuación de la superficie de revolución es igual a $z = x^2 + y^2$

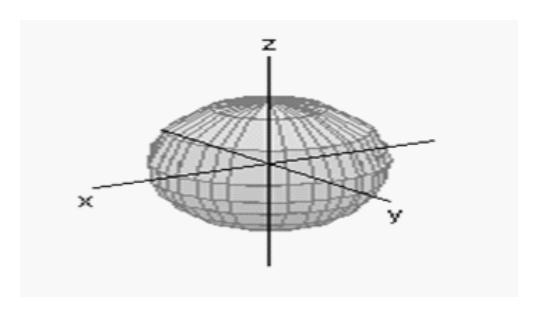
Una superficie determinada por una ecuación polinomial de segundo grado en tres variables, se denomina cuadrica.
donde $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ y j son números reales y x e y son variables
El lugar geométrico de todos los puntos intersección entre una superficie y un plano coordenado, se denomina traza.

TIPOS DE CUADRICAS

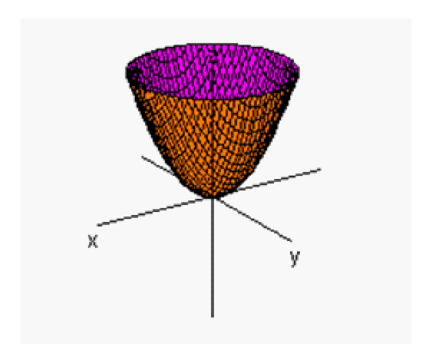
(1) ESFERA
$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$
Traza paralela al plano xy : $x^2 + y^2 = k^2$ (Circulo)
Traza paralela al plano xz : $x^2 + z^2 = k^2$ (Circulo)
Traza paralela al plano yz : $y^2 + z^2 = k^2$ (Circulo)



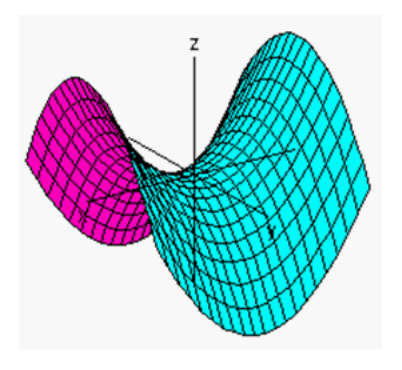
(2) ELIPSOIDE
Traza paralela al plano xy : (Elipse)
Traza paralela al plano xz : (Elipse)
Traza paralela al plano yz : (Elipse)



(3) PARABOLOIDE
Traza paralela al plano xy : (Elipse)
Traza paralela al plano xz : (Parábola)
Traza paralela al plano yz : (Parábola)

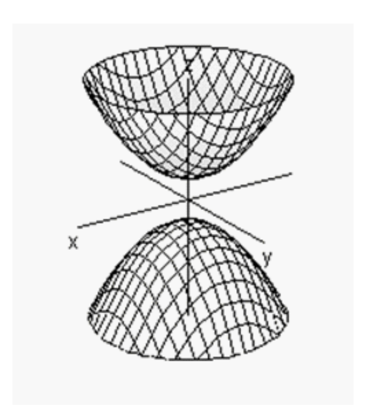


(4) PARABOLOIDE HIPERBOLICO
Traza paralela al plano xy : (Hipérbola)
Traza paralela al plano xz : (Parábola)
Traza paralela al plano yz : (Parábola)

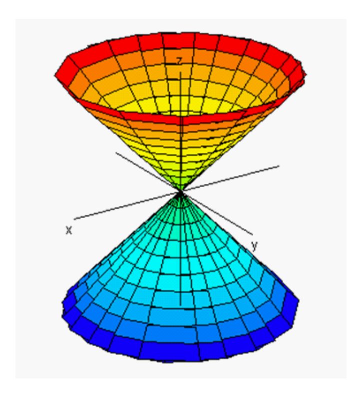


(5) HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA (O MANTO)
Traza paralela al plano xy : (Elipse)
Traza paralela al plano xz : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = k$ (Hipérbola)
Traza paralela al plano yz : $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = k$ (Hipérbola)
Si $z = 0$ entonces $x^2 - y^2 = 0$ son dos rectas.

(6) HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS (O MANTOS)
Traza paralela al plano xy : (Elipse)
Traza paralela al plano xz : (Hipérbola)
Traza paralela al plano yz : (Hipérbola)



(7) CONO
Traza paralela al plano xy : (Elipse)
Traza paralela al plano xz : (Hipérbola)
Traza paralela al plano yz : (Hipérbola)

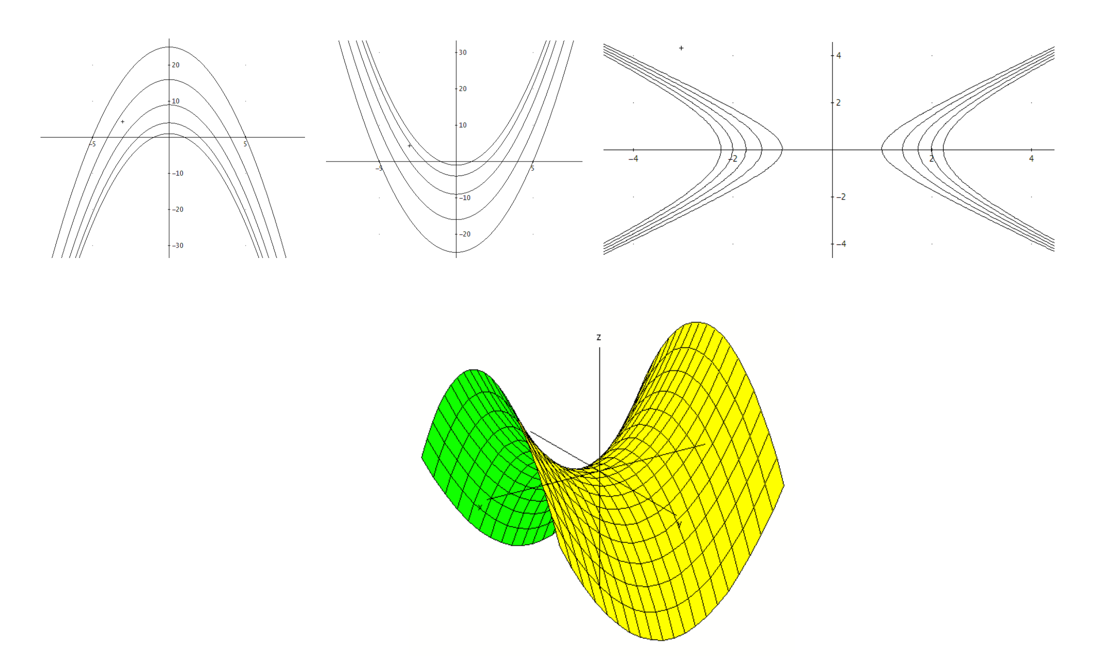


Nota : En algunos casos en que dos valores de a, b, c son iguales las trazas no son elipses si no cíırculos.

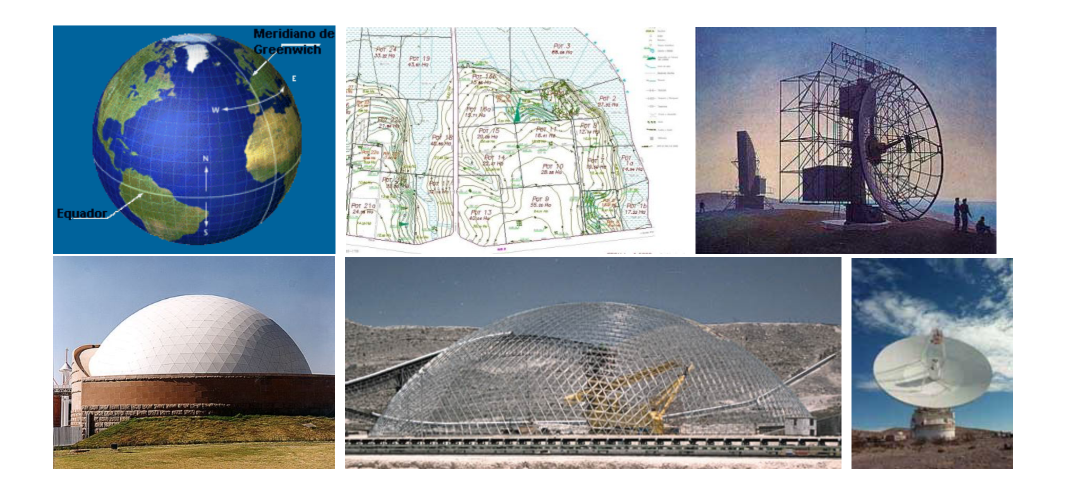
Ejemplo 1.6.2 *Grafique las trazas de la superficie $z = x^2 - y^2$, identifique la superficie y trace su gráfica.*

Si $x = k$, $z = k^2 - x^2$ las trazas son parabolas; si $y = k$, $z = x^2 - k^2$ las trazas son parabolas

y si $z = k$, $k = x^2 - y^2$ las trazas son hiperbolas. por lo tanto la superficie es un paraboloide hiperbolico (silla de montar).



Muchas aplicaciones reales tienen que ver con superficies cuadricas.Geodesia, topografia y cartografia.Antenas y radares. Cupulas



Ejercicios 1.6

1. Graficar los cilindros determinados por las ecuaciones dadas.

   a) $y = |x|$

   b) $z = Seny$

   c) $l4x^2 + 9z^2 = 1$

2. Hallar la ecuación de la superficie de revolución generada al girar la curva dada alrededor del eje especificado. Trace la gráfica

   a) $xy = 1$ eje $\boldsymbol{y}$

   b) $z = Lny$ eje $\boldsymbol{z}$

   c) $y = Senx$ eje $\boldsymbol{x}$

3. Trace las trazas de las superficies dadas en los planos $x = k$, $y = k$ y $z = k$. Identifique la superficie y trace su gráfica.

   a) $z = y^2$

   b) $9x^2 - y^2 - z^2 = 9$

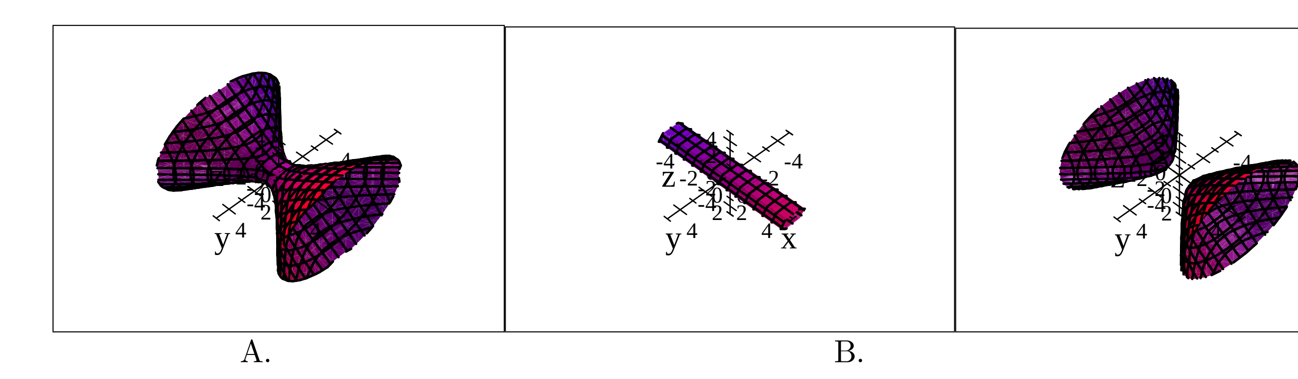
   c) $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$

4. Relacione la ecuación con la gráfica.

   a) $x^2 + 2z^2 = 1$

   b) $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$

   c) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$



A. B.

5. Demuestre que la superficie con ecuación $z = e^{-(x^2+y^2)}$ es una superficie de revolución y trace su gráfica.

6. Halle la ecuación del paraboloide que tiene vértice en (0 ,0 ,2) y abre hacia abajo , si su intersección con el plano XY determina un circulo de radio 4

7. Halle la ecuación del cono tal que las curvas de nivel en el plano XY son las rectas $x = \pm 2y$

8. Halle la ecuación de una esfera si los extremos de su diametro son los puntos $(1, 2, -3)$ y $(-2, 4, 5)$

9. Muestre que la intersección de la superficie $x^2 - 4y^2 - 9z^2 = 36$ y el plano $x + z = 9$ es una elipse

10. Determine los valores de k para los cuales la intersección del plano $x + ky = l$ y el hipérboloide elíptico de dos hojas $y^2 - x^2 - z^2 = l$ es :

    a) Una elipse

    b) Una hipérbola

11. Determine una ecuación para la superficie que consta del conjunto de puntos $p(x, y, z)$ tales que la distancia de p al eje X sea el doble de la distancia de p al plano YZ.

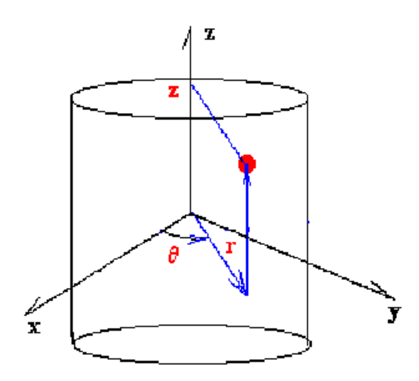
12. Uso tecnologia (**CAS**). Construya una función llamada $trazas(s, v, i, n)$, que permita graficar las trazas de una superficie.

1.7. Coordenadas cilindricas y coordenadas esfericas

Un sistema de coordenadas es una forma sistemática para representar un punto en algún espacio especificando solo algunos números. Como vimos en la sección 1.1. el sistema de coordenadas mas familiar es el sistema de coordenadas rectangulares. En $\mathbb{R}^3$ funciona especificando las coordenadas x, y y z que representan las distancias en los ejes **x**, **y** y **z** respectivamente. Las coordenadas rectangulares a veces resultan extremadamente difíciles

cuando se trata de definir ciertas formas comunes, como cilindros, superficies de revolución y esferas. Una segunda forma para determinar la ubicación de un punto en tres dimensiones es utilizando coordendas cilindricas, convirtiendo a coordenadas polares dos de las tres coordenadas rectangulares. El caso más usual es hacer polares en xy,luego la altura del plano xy es z. Uno de los primeros matemáticos que utilizo coordenadas cilindricas fue Pierre simon de Laplace.[7]

Propiedad 1.7.1 *Construcción de las coordenadas cilindricas. Si* $p = (x, y, z)$ *es un punto de* $\mathbb{R}^3$ *que determina un vector op, asociamos a el la terna* (r, θ, z) *tal que* (r, θ) *son las coordenadas polares de la proyeción de p en el plano* XY *y* z *es la distancia dirigida del plano* XY *a p, entonces* $\|proy_{XY} op\| = r$, $x = r\cos\theta$, $y = rsen\theta$ *y* $z = z$, *donde* θ *es el ángulo entre* $proy_{XY} op$ *y el eje* X.



Para convertir de coordenadas rectangulares a cilindricas empleamos $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ y $z = z$. Las coordenadas cilindricas son una combinación de las coordenadas polares en el plano con un eje coordenado.

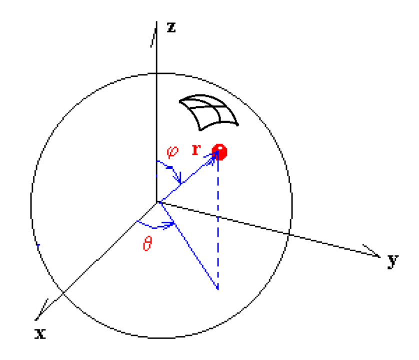
Ejemplo 1.7.1 *Sea* $p = (1, 1, \sqrt{2})$ *un punto en coordenadas rectangulares entonces para hallar sus coordenadas cilindricas proyectamos el punto p en el plano xy y obtenemos el punto* $q = (1, 1)$, *entonces* $r = \sqrt{2}$ *y* $\theta = \tan^{-1} 1 = \dfrac{\pi}{4}$, *por lo tanto las coordenadas cilindricas de p son* $(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}, \sqrt{2})$

[7]



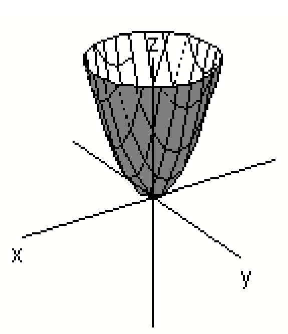


Pierre-Simon Laplace (Beaumont-en-Auge (Normandía); 23 de marzo de 1749 - París; 5 de marzo de 1827) astrónomo, físico y matemático francés que inventó y desarrolló la Transformada de Laplace y la ecuación de Laplace. Al cumplir los 19 años, principalmente por la influencia de d'Alembert, fué designado para cubrir una plaza de matemáticas en la Escuela Real Militar de París, bajo la recomendación de d'Alembert. En 1973, llegó a ser miembro de la Academia de Ciencias de París. En 1785, actuando como miembro del tribunal del Cuerpo de Artillería Real, examinó y aprobó al joven de 16 años Napoleón Bonaparte. Durante la Revolución Francesa, ayudó a establecer el Sistema Métrico. Enseñó Cálculo en la Escuela Normal y llegó a ser miembro del Instituto Francés en 1795. Bajo el mandato de Napoleón fué miembro del Senado, y después Canciller y recibió la Legión de Honor en 1805.



En coordenadas cilindricas $r = k$ determina un cilindro circular recto de radio k, $r = 0$ determina el eje z, $\theta = \theta_k$ determina un plano que forma un ángulo θ_k con el eje z y $z = k$ determina tambien un plano.entonces $z = x^2 + y^2$ que representa la ecuación de un paraboloide.

Ejemplo 1.7.2 *Encontrar una ecuación en coordenadas rectangulares equivalente a la ecuación $z = r^2$ y representar su gráfica. Como en coordenadas cilindricas $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ entonces $z = r^2 = x^2 + y^2$ representa la ecuación de un paraboloide.*



Las coordenadas cilindricas son utiles en problemas que tienen simetria alrededor de un eje, el paso a seguir es seleccionar un eje coordenado de manera que coincida con el eje de simetria.

Si e_r, e_θ, e_z son los vectores ortonormales unitarios que determinan la dirección en que se mide cada una de las coordenadas cilindricas r, θ, z entonces $e_r = [\cos\theta, sen\theta, 0]$, $e_\theta = [-sen\theta, \cos\theta, 0]$, $e_z = [0, 0, 1]$

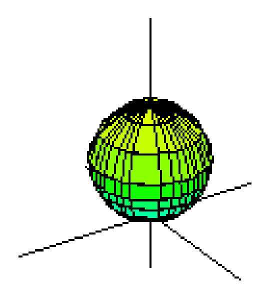
Propiedad 1.7.2 *Construcción de coordenadas esfericas. Si $p = (x, y, z)$ es un punto de $\mathbb{R}^3$que determina un vector op, asociamos a el la terna (ρ, θ, ϕ) tal que $\rho = ||op||$ determina la distancia del punto p al origen , ϕ determina el ángulo entre el eje z y op, y θ determina el ángulo entre $proy_{XY}op$ y el eje X (igual que en cilindricas) entonces $x = \rho sen\phi \cos\theta$, $y = \rho sen\phi \cos\theta$, $z = \rho \cos\varphi$, donde $r = ||proy_{XY}op||$ y $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.*

Las coordendas esfericas tambien estan relacionadas con las coordenadas polares en el plano.

Ejemplo 1.7.3 *Sea un* $p = (1, 1, \sqrt{2})$ *punto de cuyas coordenadas rectangulares entonces para hallar sus coordenadas esfericas.hallamos la norma del vector posición como* $\rho = \sqrt{4} = 2$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ *y* $\phi = \cos^{-1} 1 = 0$, *por lo tanto las coordenadas esfericas de* p *son* $(2, \frac{\pi}{4}, 0)$

En coordenadas esfericas $\rho = k$ determina una esfera de radio k, $\phi = \phi_k$ determina un semicono, $\theta = \theta_k$ determina un plano que forma un ángulo θ_k con el eje z.

Ejemplo 1.7.4 *Encontrar una ecuación en coordenadas rectangulares equivalente a la ecuación* $\rho = 4\cos\phi$ *y representar su gráfica. Multiplicando a ambos lados de la ecuación por* ρ *obtenemos obtenemos* $\rho^2 = 4\rho\cos\phi$ *pero* $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ *y* $4\rho\cos\phi = 4z$ *entonces* $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ *por lo tanto completando cuadrado en* z *obtenemos* $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ *que determina una esfera de centro* $(0, 0, 2)$ *y radio* 2



Las coordenadas esfericas son utiles en problemas que tienen simetria alrededor de un punto, el paso a seguir es seleccionar el punto de manera que coincida con el origen.

Si e_ρ, e_ϕ, e_θ, son los vectores ortonormales unitarios que determinan la dirección en que se mide cada una de las coordenadas esfericas $\rho, \theta,\ \phi$ entonces $e_\rho = [sen\phi\cos\theta, sen\phi sen\theta, \cos\phi]$, $e_\theta = [-sen\theta, \cos\theta, 0]$, $e_\phi = [\cos\phi\cos\theta, \cos\phi sen\theta, -sen\phi]$

Ejercicios 1.6

1. Encuentre las coordenadas rectangulares y coordenadas esfericas del punto p dado en coordenadas cilindricas.

   a) $(2, \pi/3, 2)$

   b) $(1, \pi/4, -2)$

   c) $(4, 5\pi/4, 0)$

2. Encuentre las coordenadas cilindricas y coordenadas esfericas del punto p dado en coordenadas rectangulares.

a) $(2, 2, 1)$
b) $(1, \sqrt{3}, 2)$
c) $(-3, 2, -1)$

3. Encuentre las coordenadas rectangulares y coordenadas cilindricas del punto p dado en coordenadas esfericas.

a) $(2, \pi/6, \pi/4)$
b) $(6, \pi/4, 0)$
c) $(9, \pi, \pi/4)$

4. Escriba la ecuación dada en coordenadas cilindricas y coordenadas esfericas.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$
b) $6x = x^2 + y^2$
c) $y = xz$

5. Escriba la ecuación dada en coordenadas rectangulares

a) $r = 3$
b) $r = 4Cos\theta$
c) $\phi = \pi/4$
d) $\rho Sen\phi = 2$

6. Trace la gráfica del sólido descrito por las desigualdades dadas en coordenadas cilindricas.

a) $0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq 1,\ \ r \leq z \leq 1$
b) $0 \leq \theta \leq \pi/2,\ 0 \leq r \leq 2,\ r^2 \leq z \leq 4$

7. Trace la gráfica del sólido descrito por las desigualdades dadas en coordenadas esfericas.

a) $0 \leq \theta \leq \pi/2,\ \ 0 \leq \phi \leq \pi/2\,,\ 1 \leq \rho \leq 2$
b) $0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi/4,\ 0 \leq \rho \leq 1$
c) $0 \leq \theta \leq 2\pi,\ \pi/2 \leq \phi \leq \pi,\ 0 \leq \rho \leq 2$

8. Grafique e identifique la superficie dada en coordenadas cilindricas

a) $r = 2\cos\theta$

b) $r = 6sen\theta$

c) $r = 1 + \cos\theta$

9. Grafique e identifique la superficie dada en coordenadas esfericas

   a) $\rho = 2\cos\phi$

   b) $\tan^2\phi = 1$

   c) $\rho = 1 - \cos\phi$

10. Utilizando un CAS grafique los siguientes puntos en

    a) Coordendas cilindricas

    b) Coordenadas esfericas.

1.8. Conceptos básicos de topologia en $\mathbb{R}^n$

En la Geometría euclídeana[8] dos objetos serán equivalentes mientras podamos transformar uno en otro mediante isometrías (rotaciones, traslaciones, reflexiones, etc), es decir, mediante transformaciones que conservan las medidas de ángulo, longitud, área, volumen y otras. Si se desea abordar de manera adecuadamente la diferenciabilidad para funciones de varias variables se deben tener claros los conceptos de limites y continuidad para este tipo de funciones. Uno de los conceptos de mayor dificultad en funciones de varias variables es el de limite ya que este concepto se define sobre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y no como se hace para funciones de variable real y valor real, sobre subconjuntos de la recta real, muchas veces estos subconjuntos son intervalos.

Decir que el limite de una función $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en un punto a (que puede o no estar en I) existe y es igual a L, significa que si x esta cerca de a entonces $f(x)$ esta cerca de L. Aqui el concepto de cercania sobre un subconjunto de la recta real esta determinado por



8



Euclides de Alejandría (s. IV-III a. C.) fue un matemático griego, al parecer era ateniense y probablemente fue alumno de la Academia. Hacia el año 300 a.C. (bajo el reinado del primer Ptolomeo), era profesor en la escuela matemática de Alejandría, de la cual probablemente fue su fundador. Se le considera como el gran sistematizador de la matemática en el mundo antiguo, ya que en sus trece libros de los Elementos expone la geometría como un sistema formal axiomático-deductivo, que consta de definiciones, postulados, y teoremas demostrados. Este texto ha servido de modelo en la posteridad a todo sistema axiomático. pero su gran importancia deriva del método axiomático utilizado, que han convertido a este libro en el texto científico más traducido y editado de toda la historia y que apareció, durante más de dos mil años, como modelo de rigor científico. La introducción de cambios en el quinto postulado de Euclides propició la aparición de geometrías «no-euclidianas», como las de Riemann y Lobatchevski, por ejemplo. Otras obras de Euclides son Tratado de geometría; Fenómenos; Datos, etc.

una vecindad de centro $\boldsymbol{a}$ y radio δ. Para funciones de varias variables estas vecindades estan determinadas por lo que se denominara bola abierta. Una vecindad de un punto $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ es el conjunto de puntos $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tales que $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|| < \delta$ para algun $\delta \in \mathbb{R}^+$ y se denomina n-bola abierta de centro $\boldsymbol{a}$ y radio δ. Notada $B(\boldsymbol{a};\delta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta\}$. Las bolas abiertas de $\mathbb{R}$ son los intervalos abiertos de centro $\boldsymbol{a}$ y extremos $a - \delta$, $a + \delta$,las bolas abiertas de $\mathbb{R}^2$ son las circunferencias abiertas de centro (a, b) y radio δ, y las bolas abiertas de $\mathbb{R}^3$ son las esferas abiertas de centro (a, b, c) y radio δ.

Ejemplo 1.8.1 *Escriba explicitamente como conjunto de puntos la bola $B((1, 2, 3); 1)$, utilizando la definición de bola abierta vemos que el centro es igual a $(1, 2, 3)$ y el radio es igual a 1, luego $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1$ es la forma explicita.*

Si $U \subset \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, se dice que $\boldsymbol{x}_0$ es un punto interior de U si existe un número real $\delta > 0$ tal que $B(\boldsymbol{a},\delta) \subset U$. Cada uno de los puntos $\boldsymbol{a}$ de U puede ser rodeado por una bola $B(\boldsymbol{a}, \delta) \subseteq U$. El conjunto de todos los puntos interiores de U se denomina interior de $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ y se nota $Int\ U$ o U^o. Evidentemente $U^o \subset U$. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, se dice que $\boldsymbol{a}$ es un punto exterior de U si existe un número real $\delta > 0$ tal que $B(\boldsymbol{a},\delta) \subset U^c$. Cada uno de los puntos $\boldsymbol{a}$ de U puede ser rodeado por una bola $B(\boldsymbol{a}, \delta) \subseteq U^c$. El conjunto de todos los puntos exteriores de U se denomina exterior de $\boldsymbol{U}$ y se nota $Ext\ U$. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, se dice que $\boldsymbol{a}$ es un punto frontera de U si para todo número real $\delta > 0$, $B(\boldsymbol{a}, \delta) \cap U \neq \phi$ y $B(\boldsymbol{a}, \delta) \cap U^c \neq \phi$. El conjunto de todos los puntos frontera de U se denomina la frontera de $\boldsymbol{U}$ y se nota $Front\, U$ o ∂U. Un punto interior de U necesariamente es un punto de U, y un punto exterior de U es un punto de U^c. Sin embargo, un punto frontera puede ser de U o de U^c. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, se dice que $\boldsymbol{x}_0$ es un punto adherente de U si para todo número real $\delta > 0$, $B(\boldsymbol{x}_0, \delta) \cap U \neq \phi$. El conjunto de todos los puntos adherentes de U se denomina la adherencia de $\boldsymbol{U}$ y se nota $Adh\, U$ o $\overline{U}$. Evidentemente $U \subset \overline{U}$ y en consecuencia $U^o \subset \overline{U}$. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, se dice que $\boldsymbol{x}_0$ es un punto de acumulación de U si para todo número real $\delta > 0$, $B(\boldsymbol{x}_0, \delta) \cap U \neq \phi$ y $B(\boldsymbol{x}_0, \delta) \cap U \neq \{\boldsymbol{x}_0\}$. El conjunto de todos los puntos de acumulación de U se llama derivado de $\boldsymbol{U}$ y se nota $Der\ U$ o U'. Evidentemente $U' \subset \overline{U}$. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, se dice que $\boldsymbol{x}_0$ es un punto aislado de U si existe un número real $\delta > 0$ tal que $B(\boldsymbol{x}_0, \delta) \cap U = \{\boldsymbol{x}_0\}$. El conjunto de todos los puntos de aislados de U se llama aislado de $\boldsymbol{U}$ y se nota $Aisl\ U$. Si $\boldsymbol{x}_0 \in U$ no es un punto de acumulación de U entonces $\boldsymbol{x}_0$ es un punto aislado de U. Evidentemente $AislU \subset \overline{U}$. Un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es acotado si existe un número real $\delta > 0$ tal que $U \subset B(\boldsymbol{x}_0, \delta)$ para algún $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ elegido arbitrariamente. Un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es abierto si todos sus puntos son interiores (o sea $U = U^o$) y se dice que es cerrado si su complemento es abierto($U = \mathbb{R}^n - U$ o sea si $U = \overline{U}$). Un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es compacto si es cerrado y acotado.

Ejemplo 1.8.2 *Clasificar el conjunto $U = \{(x, y)|\ 1 \leq x^2 + y^2 < 4\}$ vemos que es el conjunto de puntos (x, y) que estan entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ (con frontera) y $x^2 + y^2 = 2$ (sin frontera). Como U tiene puntos frontera que no son interiores entonces U no es abierto, ademas el complemento de U tiene frontera entonces U tampoco es cerrado.por lo tanto U no es ni abierto ni cerrado.*

Ejemplo 1.8.3 *Demuestre que* $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, \wedge 0 \leq z \leq\}$ *es compacto.* *El conjunto* U *es el cilindro cerrado de altura 2, luego* $U = \overline{U}$ *por lo tanto* U *es cerrado, ademas* U *es acotado pues* $U \subset B((0, 0, 0); 3)$ *entonces* U *es compacto.*

Ejercicios 1.7.

1. Escriba explı́citamente como conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ cada una de las siguientes bolas abiertas

   a) $B((2, -3), 0{,}1)$ en $\mathbb{R}^2$

   b) $B((1, 1, 3), 2)$ en $\mathbb{R}^3$

   c) $B((1, -1, 2, -2), 1)$ en $\mathbb{R}^4$

2. Determinar si el conjunto dado U es abierto, cerrado, abierto y cerrado a la vez, o ni abierto ni cerrado. Trace la gráfica

   a) $U = \{(x, y) \mid y = x\}$

   b) $U = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq -1\}$

   c) $U = \{(x, y \mid 2 < x < 4 \ , \ 2 < y \leq 5\}$

3. Determinar si el conjunto dado U es abierto, cerrado, abierto y cerrado a la vez, o ni abierto ni cerrado.

   a) $U = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) | \sum_{i=1}^{n} x_i > 0\right\}$

   b) $U = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) | 1 < \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 4\right\}$

   c) $U = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) | 1 < \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 4\right\}$

4. Demuestre que $\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$ son abiertos y cerrados a la vez

5. Demuestre que el conjunto $A = \{p\}$ formado por un solo punto $p \in \mathbb{R}^n$ no es abierto.

6. Demuestre que los puntos frontera de cualquier intervalo abierto (a, b) de R son los puntos a y b

7. Demuestre que el conjunto $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ (unión de conjuntos A_i abiertos) es abierto.

8. Demuestre que el conjunto $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ (intersección finita de conjuntos A_i abiertos) es abierto.

9. Demuestre que el conjunto $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ (unión finita de conjuntos A_i cerrados) es cerrado.
10. Demuestre que el conjunto $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ (intersección de conjuntos A_i cerrados) es cerrado.
11. Demuestre que la frontera de A es un conjunto cerrado.
12. Demuestre que los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ son conjuntos abiertos
13. Demuestre que los intervalos cerrados de $\mathbb{R}$ son conjuntos cerrados

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPITULO 1

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso, justificando su respuesta.

1. Todo espacio vectorial contiene a 0.
2. Todo subconjunto de un espacio vectorial es subespacio vectorial.
3. Dos rectas en el espacio que no se intersectan, son paralelas.
4. Si dos planos se intersectan, la intersección es una recta.
5. Toda transformación lineal $T : V \to W$ es invertible.
6. Un cilindro es una superficie cuya directriz es un circulo.
7. La intersección entre dos superficies es una curva cerrada.
8. Las coordendas cilindricas pueden ser de la forma $x = x$, $y = r\cos\theta$ $z = rsen\theta$
9. En coordenadas esfericas el radio de una esfera es igual a ρ
10. Si un conjunto no posee frontera entonces es abierto.

PREGUNTAS DE SELECCION MULTIPLE CON UNICA RESPUESTA.

1. El conjunto de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^n$ con la suma y el producto usual es un espacio vectorial si:

   A. $x = 1$ B. $y = x$ C. $z = xy$ D. $y \geq 0$
2. Si A es un subespacio vectorial de V y $B \subset A$, se puede afirmar que tambien es subespacio vectorial de V

   A. B B. $A - B$ C. $A \cap B$ D. $A \cup B$.

3. Si $B_1 = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}\}$ y $B_2 = \{\mathbf{v_1'}, \mathbf{v_2'}, ..., \mathbf{v}_m'\}$ son bases de un espacio vectorial V, es correcto afirmar que:

   A. $n < m$ B. $n > m$ C. $n = m$ D. $\dim V = n + m$

4. Un vector unitario en la misma dirección y sentido de $[-1, -2, 3]$ es:

   A. $\left[-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$ B. $\left[\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right]$ C. $-\frac{1}{\sqrt{14}}[1, 2, -3]$ D. $\left[-\frac{1}{14}, -\frac{2}{14}, \frac{3}{14}\right]$

5. Para las rectas con ecuaciones $L_1 : [x, y, z] = [1, 2, 3] + t[2, 3, 4]$ y $L_2 : \frac{x+1}{6} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+5}{2}$ se puede afirmar que:

   A. Son paralelas B. Son ortogonales C. Son Oblicuas D. Se interceptan en un punto

6. Cual de las siguientes rectas esta contenida en el plano $2x - 3y + z = 1$

   a) A. $x = 1 + 2t$, $y = 2 - 3t$, $z = 5 + t$ B. $x = 1 - t$, $y = 2 - t$, $z = 1 - t$ C. $x = 1 - 2t$, $y = 2 + 3t$, $z = 1 - t$ D. $x = t + 1$, $y = t + 2$, $z = t + 5$

7. La transformación lineal asociada a la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ es igual a:

   a) A. $T(x, y) = [3x + 2y, -x, 2x + 3y]$ B. $T(x, y) = [3x - y + 2z, 2x + 3z]$ C. $T(x, y) = [2, 0, 3]$ D. $T(x, y) = [5x, -y, 5z]$

8. La ecuación de la superficie de revolución generada al girar la curva $z = x^2$ alrededor del eje x es igual a:

   a) A. $z = x^2 + y^2$ B. $x = y^2 + z^2$ C. $x^2 = y^2 + z^2$ D. $x^2 = \sqrt{y^2 + z^2}$

9. Para la superficie $z = e^{-(x^2+y^2)}$ es correcto afirmar que sus trazas son:

   a) A. Parabolas si $x = k$ B.Hiperbolas si $y = k$ C. Exponenciales si $z = k$ D. Circulos si $z = k$

10. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y si $x \in A$ es correcto afirmar que $A - \{x\}$:

    a) A. es abierto B. es cerrado C. es abierto y cerrado a la vez D. no es ni abierto ni cerrado

PREGUNTAS DE SELECCION MULTIPLE CON MULTIPLE RESPUESTA.

Si 1 y 2 son correctas marque A Si 2 y 3 son correctas marque B
Si 3 y 4 son correctas marque C Si 2 y 4 son correctas marque D
Si 1 y 3 son correctas marque E

1. Si A y B son matrices de $n \times n$ y $*$ una operación definida en $M_{n\times n}$ tal que $A*B = AB$ entonces es correcto afirmar que $*$ es:

   1. Asociativa 2. Conmutativa 3. Invertiva 4. Modulativa.
   A. B. C. D. E.

2. Dados los vectores $U = [5, -4, 7]$ y $V = [-10, 8, k]$ se puede afirmar que:

   1. Si $k = -14$ U y V son paralelos. 2. Si $k = 0$, $\|U\| = \|V\|$ 3. Si $k = \dfrac{82}{7}$, U y V son ortogonales (perpendiculares) 4. Si $k = 2$ el ángulo entre U y V es 30°
   A. B. C. D. E.

3. Sea $P_2(t)$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor igual a 2 y sea $W = gen\{S\}$ donde $S = \{t^2 + 1, t + 1\}$ entonces es correcto afirmar que:

   1. Los vectores de S son linealmente dependientes 2. $W = \{at^2 + bt + c | c = a + b\}$ 3. $gen(S) = P_2(t)$ 4. S es una base de W
   A. B. C. D. E.

4. Para la normas vectorial $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = max\{|x_i|\}$ definida en $\mathbb{R}^n$ es correcto afirmar que:

   1.$\|[2, -3, 0]\|_\infty = 2$ 2. $\|u]\|_\infty = \|v]\|_\infty$ si sólo si $u = v$ 3. $d([2, 1, -1], [1, 0, 3]) = 4$ 4. $d(v, \mathbf{0}) = \|v]\|_\infty$
   A. B. C. D. E.

5. Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ es correcto afirmar que:

   1.$p(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2$ es su polinomio característico 2. $\lambda = 6$ es un valor propio 3.$[1, 1, 1]$ es un vector propio 4.posee tres valores propios diferentes
   A. B. C. D. E.

6. Es correcto afirmar que la recta $x = t$, $y = 4t$, $z = 7t$ es la intersección de los planos:

   1. $x - 2y + z = 0$ 2. $x + 2y - z = 0$ 3. $2x + 3y - 2z = 0$ 4. $2x - 3y + 2z = 0$
   A. B. C. D. E.

7. Sean $p(2, 3, 5)$ un punto, $L_1 : \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-7}{-4} = \dfrac{z-2}{4}$ y $L_2 : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{4} = z + 1$ dos rectas y $\pi : 3x - 2y + 7z = 4$ es un plano, entonces es correcto afirmar que la distancia entre:

1. L_1 y L_2 es 3 2. p y L_1 es 4,5 3. p y L_2 es 4. p y π es $\dfrac{35}{\sqrt{62}}$

A. B. C. D. E.

8. Al reducir la ecuación $9x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 2z = 0$ a una de las formas estándar, su clasificación es:

1. Cono elíptico con vértice en $\left(\dfrac{1}{3}, 1, 1\right)$ 2. Cono elíptico con el eje paralelo al eje z 3. Cono elíptico con vértice en $(0, 1, 1)$ 4. Cono elíptico con el eje paralelo al eje x.

A. B. C. D. E.

9. La ecuación de la superficie $z = xy$ es equivalente a:

1.. $y = xz$ 2. $z = \dfrac{r}{2} sen(2\theta)$ 3. $\rho = \dfrac{2 \cot \phi \csc \phi}{sen(2\theta)}$ 4. $x = yz$

A. B. C. D. E..

10. Si A y B son dos conjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$ entonces

1. $A \cup B$ es cerrado 2. $A \cap B$ es abierto 3. $\bar{A} \cup \bar{B}$ es abierto 4. $\bar{A} \cap \bar{B}$ es cerrado

A. B. C. D. E.

PREGUNTAS ABIERTAS

1. Muestre que el conjunto de todos los números reales positivos forma un espacio vectorial con las operaciones $x + y = xy$ y $\alpha x = x^\alpha$

2. Demuestre que cualquier combinación lineal de dos vectores paralelos es un vector paralelo a ambos.

3. Demuestre que los vectores $(1, a, a^2)$, $(1, b, b^2)$ y $(1, c, c^2)$ son linealmente independientes si a, b y c son diferentes.

4. Si V es el espacio vectorial de todas las funciones de valor real continuas y S el conjunto de todas las funciones diferenciables. Pruebe que S no genera a V sobre $\mathbb{R}$. (Mostrando que $f(X) = |x|$ no pertenece al generado por S)

5. Si v_1 y v_2 son vectores unitarios no paralelos, demuestre que el conjunto $\{v_1, v_2, v_1 \times v_2\}$ es una base.

6. Demuestre que $\|\boldsymbol{x}\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ es una norma en $\mathbb{R}^n$.

7. Cada pareja de vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ de $\mathbb{R}^3$ forma un angulo de $\dfrac{\pi}{3}$. Suponiendo que: $\|\boldsymbol{u}\| = 2$, $\|\boldsymbol{v}\| = 2$ y $\|\boldsymbol{w}\| = 3$, calcule $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\|$

8. Los tres angulos directores de un cierto vector unitario son iguales y su valor esta entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, cual es el vector ?

9. Si u, v, w son vectores ortonormales y $\alpha u+\beta v+\gamma w = \delta$ demuestre que α=δu, $\beta = \delta v$, $\gamma = \delta w$ y de una interpretación geometrica.

10. Si $v_1, v_2, ..., v_n$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ y $x = s_1a_1 + s_2a_2 + ... + s_na_n$, $y = t_1a_1 + t_2a_2 + ... + t_na_n$ entonces $x \bullet y = s_1t_1 + s_2t_2 + ... + s_nt_n$.

11. Demuestre que si v es un vector de $\mathbb{R}^3$ y α, β y γ son los angulos que forma v con los respectivos ejes de coordenadas, entonces $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

12. Sean $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ vectores unitarios que son ortogonales entre si. Mostrar que si $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}+\chi\boldsymbol{w}$ entonces $\alpha = \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{u}$, $\beta = \boldsymbol{a} \bullet v$, $\chi = \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{w}\boldsymbol{c}$

13. Si v y w son vectores de R^3 y ademas $\|\boldsymbol{v}\| = 3$ y $\|\boldsymbol{w}\| = 7$. Si $v \bullet w = 5$ halle $\|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}\|$

14. Demuestre que $v - proy_{\boldsymbol{w}}v$ es ortogonal a w, para todo v y w.

15. Demuestre que si $T : V \to W$ es una transformación lineal y si T^{-1} existe, entonces T^{-1} es una transformación lineal.

16. Si A es una matriz de 2 $\times$2 demuestre que el polinomio caracteristico de A es igual a $P(\lambda) = \lambda^2 - traza(A)\lambda + |A|$

17. Sean P, Q, R tres puntos no colineales de $\mathbb{R}^3$ Si $v = PQ$ y $w = PR$ y S es el punto medio del vector QR demuestre que $PS = \frac{1}{2}(v + w)$

18. Hallar la ecuación del conjunto de rectas que pasan por el punto $(2, 3, 4)$ y son paralelas al plano XY y al plano XZ

19. Hallar la ecuación del plano que satisface las condiciones dadas:

    a) Pasa por el punto $P = (3, 2, 1)$ y es paralelo al plano $3x - 2y + 4z = 7$
    b) Contiene al eje Z y forma un ángulo de $\dfrac{\pi}{4}$ con el eje X positivo.
    c) Sus intersecciones con los ejes son : $X = A$, $Y = B$ y $Z = C$

20. Dos caras de un cubo se encuentran en los planos $3x-y+2z = 5$ y $3x-y+2z = 7$ Calcule el volumen del cubo.

21. Mostrar que tres vectores A, B y C estan en el mismo plano que pasa por el origen si y solo si existen escalares α, β y χ no todos nulos, tales que $\alpha A + \beta B + \chi C = 0$

22. Sea $V = (3, 4, 5)$ y suponga que W es cualquier punto en $\mathbb{R}^3$. Cuando $gen\{V, W\}$ es una recta? Que tipo de recta?

23. Suponga que U, V y W son puntos arbitrarios de $\mathbb{R}^3$. Bajo que circunstancias $gen\{U, V, W\}$ es un plano, es una recta, es un punto

24. Sea W el plano que contiene a la recta $y = x$ en el plano XY y tambien contiene al eje Z. Encuentre una base para W.

25. Identifique la superficie $z = xy$ haciendo una rotación adecuada de los ejes en el plano XY.

26. Hallar la ecuación de la superficie que satisface las condiciones dadas.

    a) El conjunto de todos los puntos $P(x, y, z)$ equidistantes del punto $(0, 5, 0)$ y del plano $y = -5$.

    b) El conjunto de todos los puntos $P(x, y, z)$ equidistantes del punto $(2, 0, 0)$ y del plano yz.

    c) El conjunto de todos los puntos $P(x, y, z)$ tales que la distancia de P al eje X sea el triple de la distancia de P al plano YZ.

27. Debido a las fuerzas causadas por su rotación, la tierra es un elipsoide oblato en lugar de una esfera. El radio ecuatorial mide 3963 millas y el radio polar mide 3950 millas. Determine la ecuación del elipsoide, asumiendo que el centro de la tierra está en $(0, 0, 0)$ y que la traza formada por el plano $z = 0$ corresponde al ecuador.

28. Demuestre que la curva intersección entre las superficies $x^2 + 2y^2 - z^2 + 3x = 1$ y $2x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 5y = 0$ se encuentra en un plano.

29. Encuentre una ecuación en coordenadas cilindricas y una ecuación en coordenadas rectangulares equivalente a la ecuacióon $\rho Sen\phi Cos\theta = 1$.

30. Encuentre una ecuación en coordenadas rectangulares y una ecuación en coordenadas esfericas equivalente a la ecuación $r^2 Cos(2\theta) + z^2 = 1$

31. Describa el sólido acotado inferiormente por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

32. La parabola $z = 4y^2$ (con $x = 0$) se hace girar alrededor del eje Z. Escriba una ecuación para la superficie resultante en coordenadas cilindricas.

33. Determine la ecuación de una esfera con centro en (h, i, j) y radio k, en coordenadas esfericas.

CAPÍTULO 2

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES



El que espera desespera
dice la voz popular
!Que verdad tan verdadera¡
La verdad es lo que es,
y sigue siendo verdad
aunque se piense al revés.
A. MACHADO, CXXXVI
"Proverbios y cantares"

En los cursos anteriores de cálculo, se estudiaron funciones de valor real y variable real. Funciones $f : A \to B$ donde tanto A como B son subconjuntos de $\mathbb{R}$. A es el dominio de f, B el codominio de f y el rango o recorrido de f es el conjunto de los $b \in B$ tales que $b = f(a)$, con $a \in A$. En este capitulo se generalizará para dimensiones mayores el estudio de todos los tipos de funciones $\mathbb{F}$ cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y cuyas imagenes son puntos de $\mathbb{R}^m$, denominadas funciones de varias variables.

Una regla $\mathbb{F}$ que asocia a cada elemento $\boldsymbol{x}$ de $U \subseteq \mathbb{R}^n$ exactamente un punto $\boldsymbol{z}$ de $\mathbb{R}^m$, se denomina función de $\mathbb{R}^n$en $\mathbb{R}^m$.

$\mathbb{F} : U \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ en $\mathbb{R}^m$; con $\boldsymbol{z} = \mathbb{F}(\boldsymbol{x})$ donde $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in U$ y $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, ..., z_m) \in \mathbb{R}^m$

2.1. Funciones de variable real y valor vectorial

Las funciones de varias variables que estan más relacionadas con las vistas en los cursos anteriores de cálculo son las funciones de variable real y valor vectorial. La forma mas sencilla es considerar un vector de funciones de variable real y valor real. En esta sección se estudiaran este tipo de funciones, su estudio no es tan diferente del estudio de las funciones de variable real y valor real tratadas en los anteriores cursos de cálculo ya que si f_k son funciones de $I \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y consideramos el vector $\boldsymbol{f}(t) = [f_k(t)]$ con $k = 1, 2, ..., m$ entonces $\boldsymbol{f}$ es una función de $I \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^m$.

Una función $\boldsymbol{f}$ cuyo dominio es un subconjunto I de $\mathbb{R}$ y cuyo rango es un subconjunto de $\mathbb{R}^m$ con $m \geq 2$ se denomina función de variable real y valor vectorial, por simplicidad la denominaremos función real-vectorial.

Notación 2 $\boldsymbol{f}$ *:$I \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^m$ con $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(t)$ donde $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, ..., w_m) \in \mathbb{R}^m$*

Si $\boldsymbol{f}$ es una función real-vectorial de $I \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^m$, entonces para cada w_k de $\boldsymbol{w}$, $f_k(t) = w_k$ se denomina función componente o coordenada de $\boldsymbol{f}$. Las funciones componentes o coordenadas de una función de variable real y valor vectorial $\boldsymbol{f}$ son funciones f_k de variable real y valor real, que se trataron en los cursos anteriores de cálculo.

Propiedad 2.1.1 *Si $\boldsymbol{f}$: es una función real-vectorial de $I \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^m$, entonces:*

(i) El dominio de $\boldsymbol{f}$ es el mayor subconjunto I de $\mathbb{R}$ en el que $\boldsymbol{f}$ esta definida, o sea el conjunto de números reales t tales que $\boldsymbol{f}(t)$ existe.

(ii) El codominio de $\boldsymbol{f}$ es $\mathbb{R}^m$.

(iii) El rango o recorrido de $\boldsymbol{f}$ es el conjunto $\boldsymbol{f}(I)$, o sea el conjunto de puntos $\boldsymbol{f}(t)$ para cada $t \in I$.

Ejemplo 2.1.1 *Sean $f_1(t) = 2 + 3t$, $f_2(t) = -5 + t^2$ y $f_3(t) = 2t^3$, podemos formar la función $\boldsymbol{f}(t) = [2 + 3t, -5 + t^2, 2t^3]$, tambien podemos representar a $\boldsymbol{f}$ usando la base canonica de $\mathbb{R}^3$ como $\boldsymbol{f}(t) = (2 + 3t)\boldsymbol{i} + (-5 + t^2)\boldsymbol{j} + (2t^3)\boldsymbol{k}$. El dominio de $\boldsymbol{f}$ es $\mathbb{R}$, ya que el dominio de cada una de sus funciones componentes es $\mathbb{R}$, el rango de $\boldsymbol{f}$ es el conjunto $R = \{(w_1, w_2, w_3)|w_2 \geq -5\}$.*

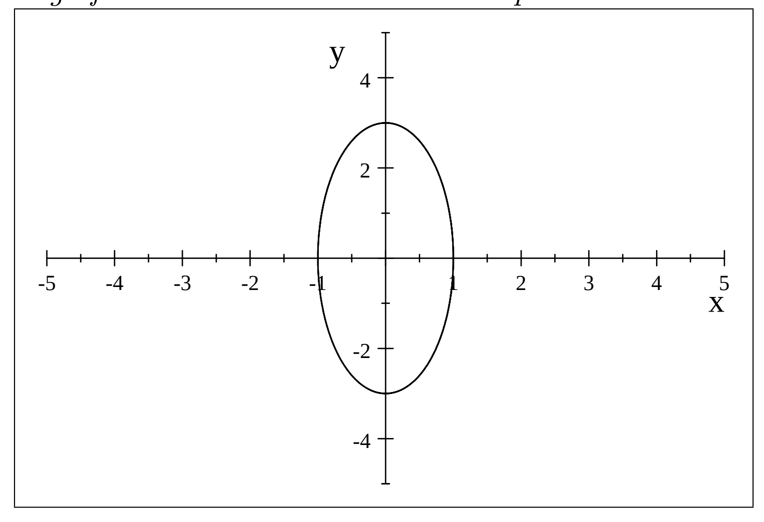
Como todas las funciones componentes de una función real-vectorial dependen de la misma variable t, entonces t se denomina parametro, luego la gráfica de una función real-vectorial es una curva parametrizada, los unicos casos que se pueden graficar de manera convencional son los de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ denominadas curvas planas paramerizadas y los de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$, denominadas curvas en el espacio parametrizadas.

Ejemplo 2.1.2 *Dibujar la curva plana representada por la función real-vectorial* $\boldsymbol{f}(t) = [\cos t, 3sent]$ $0 \leq t \leq 2\pi$

$x = \cos t$ *y* $y = 3sent$, *despejando* $\cos t$ *y* $sent$ *obtenemos* $x^2 = \cos^2 t$ *y* $\dfrac{y^2}{9} = sen^2 t$

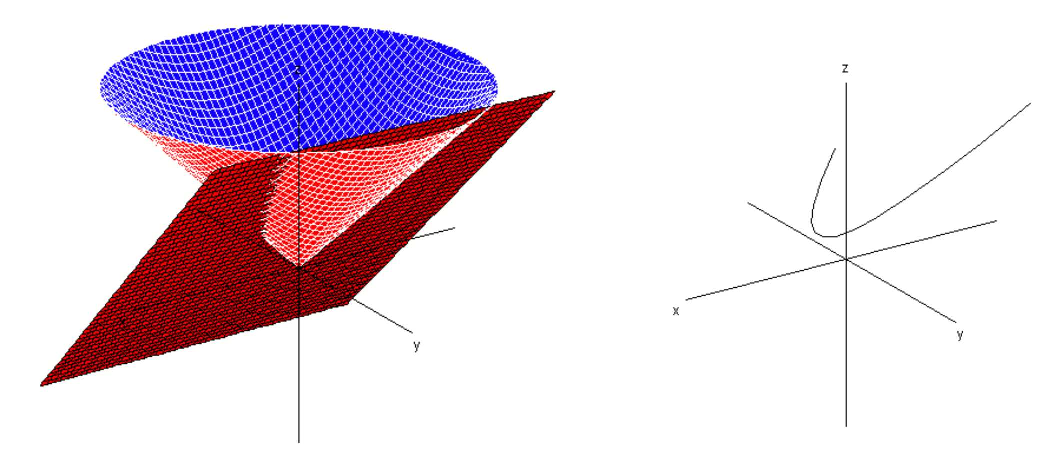
entonces $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$ *es su ecuación rectangular,*

la gráfica de esta ecuación es una elipse



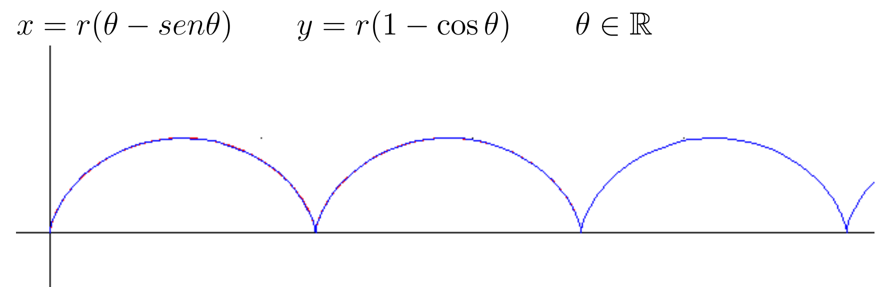
La intersección entre dos superficies se puede representar por medio de una función real-vectorial de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 2.1.3 *Encuentre una función real-vectorial que represente la curva intersección entre el cono* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *y el plano* $z = 1 + y$.



Reemplazando la segunda ecuación en la primera ecuación, obtenemos $1+y = \sqrt{x^2+y^2}$
luego $1+2y = x^2$ *entonces* $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2}$
por lo tanto si $x = t$, $y = \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{1}{2}$ *y* $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{t^2}{2}$, *y* $\boldsymbol{f}(t) = \left[t, \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{t^2}{2}\right]$

Ejemplo 2.1.4 *La curva plana trazada por un punto p sobre la circunferencia de un círculo de radio r, cuando el círculo rueda a lo largo de una recta se denomina cicloide (el matemático francés Blaise Pascal* [1] *la estudio en 1649). Las ecuaciones paramétricas de la cicloide son*
$x = r(\theta - sen\theta) \qquad y = r(1-\cos\theta) \qquad \theta \in \mathbb{R}$



Si dos objetos se desplazan por el espacio siguiendo dos trayectorias, para saber si se chocarán, se debe saber si las trayectorias se cortan y si ademas los objetos estarán en la misma posición en lá intersección de sus trayectorias

Ejemplo 2.1.5 *Dos partículas siguen las trayectorias definidas por las siguientes funciones* $\boldsymbol{f}(t) = [t^2, t^2, t^2]$ *y* $\boldsymbol{g}(t) = [4t-3, 7t-12, 5t-6]$.*¿Se chocarán?*
Veamos para que valor(es) de t son iguales las funciones $\boldsymbol{f}$ *y* $\boldsymbol{g}$.
$t^2 = 4t - 3$, *entonces* $t^2 - 4t + 3 = 0$ *luego* $t = 3$ *o* $t = 1$

1



Blaise Pascal (Clermont-Ferrand, Auvernia, Francia, 19 de junio de 1623 - París, 19 de agosto de 1662), matemático, físico y filósofo religioso francés. Considerado el padre de las computadoras junto con Charles Babbage. Sus contribuciones a las ciencias naturales y aplicadas incluyen la invención y construcción de calculadoras mecánicas, estudios de la teoría matemática de probabilidad, investigaciones sobre los fluidos y la aclaración de conceptos tales como la presión y el vacío. Después de una experiencia religiosa profunda en 1654, Pascal abandonó las matemáticas y la física para dedicarse a la filosofía y a la teología, publicando en este periodo sus dos obras más conocidas: Las Lettres provinciales (Cartas provinciales) y Pensées (Pensamientos). Con dieciséis años escribió su primer trabajo serio sobre matemática a modo de prueba llamado Essai pour les coniques (Ensayo sobre cónicas), basándose en un trabajo de Desargues que había merecido su interés..En 1654, Pascal mantiene correspondencia con Pierre de Fermat y envía una primera aproximación al cálculo de probabilidades, ese mismo año publica el tratado del triángulo aritmético en el que describe las propiedades y aplicaciones del triángulo aritmético o triángulo de Pascal, manera de presentar coeficientes binomiales (aunque los matemáticos chinos conocían el triángulo desde siglos atrás).

$t^2 = 7t - 12$ *entonces* $t^2 - 7t + 12 = 0$ *luego* $t = 4$ *o* $t = 3$
$t^2 = 5t - 6$ *entonces* $t^2 - 5t + 6 = 0$ *luego* $t = 3$ *o* $t = 2$
por lo tanto se chocarán en $t = 3$

Los conceptos de límite, continuidad, derivada e integral, se generalizan facilmente a una función real-vectorial.

Si f *es una función real-vectorial de* $I \subseteq R$ *en* R^m *y* a *es un punto interior o frontera de* I *se dice que limite cuando* t *tiende a* a *de* $f(t)$ *es igual a* L, *escrito* $\lim_{t\to a} f(t) = L$
si y solamente si $\forall \in > 0$, $\exists\ \delta > 0$, *tal que si* $|t - a| < \delta$ *implica que* $\|\boldsymbol{f}(t) - L\| < \in$.

Una función real-vectorial $\boldsymbol{f}$ *tiene límite en* a *si cada una de sus funciones componentes* f_k *tiene límite en* a, o sea $\lim_{t\to a} \boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{L}$ si y solamente si $\lim_{t\to a} f_k(t) = L_k$ para $k = 1, 2, ...m$.

Nota : A partir de las funciones componentes f_k de una función de valor vectorial $\mathbf{F}$ podemos asegurar que $\lim_{t\to a} \mathbf{F}(t) = \mathbf{L}$ si y sólamente si $\lim_{t\to a} F_k(t) = L_k\ \forall k = 1, 2, ..., m$. O sea el límite de una función vectorial existe, si existen los límites de las funciones que lo componen, cada uno de estos límites es de una función de variable real y valor real considerados en el curso de cálculo de una variable.

Ejemplo 2.1.6 *Si* $\boldsymbol{f}(t) = [\cos t, sent]$ *demuestre que* $\lim_{t\to 0} \boldsymbol{f}(t) = [1, 0]$

Utilizando la definición formal de límite si $|t| < \delta$ *veamos que* $\|[\cos t, sent] - [1, 0]\| < \in$,

$\|[\cos t, sent] - [1, 0]\| = \|(\cos t - 1, sent)\| = \sqrt{(\cos t - 1)^2 + (sent)^2} \leq |\cos t - 1| + |sent| < 2\delta$

por lo tanto si $|t| < \delta$ *implica que* $|\cos t - 1| < \dfrac{\epsilon}{2}$ *y* $|sent| < \dfrac{\epsilon}{2}$, *luego* $\epsilon = 2\delta$

Propiedad 2.1.2 *Suponga que* $\boldsymbol{f}$ *y* $\boldsymbol{g}$ *son funciones de variable real y valor vectorial que poseen límite cuando* $t \to a$ *y sea* c *una constante, entonces:*

a. $\lim_{t\to a}(\boldsymbol{f}(t) \pm \boldsymbol{g}(t)) = \lim_{t\to a} \boldsymbol{f}(t) \pm \lim_{t\to a} \boldsymbol{g}(t)$
b. $\lim_{t\to a} c\boldsymbol{f}(t) = c\lim_{t\to a} \boldsymbol{f}(t)$
c. $\lim_{t\to a}(\boldsymbol{f}(t) \cdot \boldsymbol{g}(t)) = \lim_{t\to a} \boldsymbol{f}(t) \cdot \lim_{t\to a} \boldsymbol{g}(t)$
d. $\lim_{t\to a}(\boldsymbol{f}(t) \times \boldsymbol{g}(t)) = \lim_{t\to a} \boldsymbol{f}(t) \times \lim_{t\to a} \boldsymbol{g}(t)$ *en* $\mathbb{R}^3$

Ejemplo 2.1.7 *Evaluar* $\lim_{t\to 0} \left[\dfrac{sent}{t}, e^t, t^2 + 3t + 2\right]$.

Calculamos el límite de cada una de sus funciones componentes (si existen).

$\lim_{t\to 0} \dfrac{sent}{t} = 1$, $\lim_{t\to 0} e^t = 1$ *y* $\lim_{t\to 0}(t^2 + 3t + 2) = 2$

luego $\lim_{t\to 0} \left[\dfrac{sent}{t}, e^t, t^2 + 3t + 2\right] = [1, 1, 2]$

Una función real-vectorial $\boldsymbol{f}$ *es continua en a si:*
a. $\boldsymbol{f}(a)$ *existe*
b.$\lim\limits_{t\to a}\boldsymbol{f}(t)$ *existe*
c. $\lim\limits_{t\to a}\boldsymbol{f}(t) = F(a)$

$\boldsymbol{f}$ *es continua en a si y solamente si* $\lim\limits_{t\to a}\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{f}(a)$

Una función real-vectorial $\boldsymbol{f}$ *es continua en a si cada una de sus funciones componentes* f_k *es continua en* a.

Ejemplo 2.1.8 *La función real-vectorial* $\boldsymbol{f}(t) = \left[\frac{sent}{t}, e^t, t^2+3t+2\right]$ *es discontinua en* $t = 0$, *pero está discontinuidad es removible ya que el límite en* $t = 0$ *existe (ejemplo anterior), luego* $\boldsymbol{f}$ *se puede volver continua redifiniendola de la siguiente manera* $F(t) =$

$$\begin{cases} \left[\dfrac{sent}{t}, e^t, t^2+3t+2\right] & si\ t \neq 0 \\ [1,1,2] & si\ t = 0 \end{cases}$$

La derivada de una función $\boldsymbol{f}$ real-vectorial se puede definir de la misma manera que para las funciones de variable real y valor real, excepto que la derivada ahora es un vector.

Si $\boldsymbol{f}$ es derivable en a entonces $\boldsymbol{f}'(a) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\boldsymbol{f}(a+h)-\boldsymbol{f}(a)}{h}$ siempre que el lìmite exista. $\boldsymbol{f}$ es derivable en a si y solamente si $\boldsymbol{f}'(a) = [f_k'(a)]$

Si p y q son puntos cuyos vectores posición son $\boldsymbol{f}(t)$ y $\boldsymbol{f}(t+h)$ entonces el vector pq es secante a la curva determinada por $\boldsymbol{f}(t)$. Si $h \to 0$ el vector tiende a un vector que esta en la recta tangente, por lo tanto el vector $\boldsymbol{f}'(t)$ se denomina vector tangente a la curva determinada por $\boldsymbol{f}(t)$ en el punto p, siempre que $\boldsymbol{f}'(t)$ exista y $\boldsymbol{f}'(t) \neq 0$.

Ejemplo 2.1.9 *Calcule la derivada de* $\boldsymbol{f}(t) = [tsent, t^2, \cos(3t)]$.
Derivando cada una de las funciones componentes obtenemos
$\boldsymbol{f}'(t) = [sent + t\cos t, 2t, -3sen(3t)]$

Ejemplo 2.1.10 *Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva determinada por* $\boldsymbol{f}(t) = \left[\ln t, 2\sqrt{t}, t^2\right]$ *en el punto* $(0,2,1)$.
Hallamos el vector tangente $\boldsymbol{f}'(t) = \left[\frac{1}{t}, \frac{1}{2\sqrt{t}}, 2t\right]$
en el punto $t = 1$, $\boldsymbol{f}'(1) = \left[1, \frac{1}{2}, 2\right]$
luego $[x,y,z] = [0,2,1] + t\left[1, \frac{1}{2}, 2\right]$ *es la ecuación vectorial de la recta.*

La curva determinada por una función real-vectorial f *es suave o regular en un intervalo abierto* I *si* $f'(t)$ *es continua y* $f'(t) \neq 0$ *para todo valor* t *del intervalo* I.

Propiedad 2.1.3 *Si* $\boldsymbol{f}$ *y* $\boldsymbol{g}$ *son funciones real-vectorial derivables y* c *es una constante, entonces:*

a. $(\boldsymbol{f}(t) \pm \boldsymbol{g}(t))' = \boldsymbol{f}\,'(t) \pm \boldsymbol{g}'(t)$
b. $(c\boldsymbol{f}(t))' = c\boldsymbol{f}'(t)$
c. $(\boldsymbol{f}(t) \cdot \boldsymbol{g}(t))' = \boldsymbol{f}\,'(t) \cdot \boldsymbol{g}(t) + \boldsymbol{f}(t) \cdot \boldsymbol{g}'(t)$
d. $(\boldsymbol{f}(t) \times \boldsymbol{g}(t))' = \boldsymbol{f}\,'(t) \times \boldsymbol{g}(t) + \boldsymbol{f}(t) \times \boldsymbol{g}'(t)$ *(en* $\mathbb{R}^3$*)*

Igual que con las funciones de variable real y valor real, la segunda derivada de una función real-vectorial $\boldsymbol{f}$ es la derivada de $\boldsymbol{f}'$, o sea $\boldsymbol{f}''(t) = (\boldsymbol{f}'(t))'$

Ejemplo 2.1.11 *La segunda derivada de* $\boldsymbol{f}(t) = [tsent, t^2, \cos(3t)]$ *es*
$\boldsymbol{f}''(t) = [sent + t\cos t, 2t, -3sen(3t)]' = [2\cos t - tsent, 2, -9\cos(3t)]$

De manera similar la integral de una función real-vectorial se puede definir de la misma manera que para las funciones de variable real y valor real, excepto que la integral es un vector.

Una función real-vectorial derivable $\boldsymbol{F}$ es una antiderivada de una función real-vectorial $\boldsymbol{f}$ en un intervalo I si $\boldsymbol{F}'(t) = \boldsymbol{f}(t)$ en cada t de I.

La integral indefinida de una función real-vectorial f *respecto a* t *es el conjunto de todas las antiderivadas de* f *y se nota por* $\int f(t)dt = F(t) + C$, *donde* F *es una antiderivada de* f. *Si* f *es una función real-vectorial integrable, entonces* $\int \boldsymbol{f}(t)dt = \left[\int f_k(t)dt + c_k\right]$

Ejemplo 2.1.12 *Hallar* $\boldsymbol{f}(t)$ *sabiendo que* $\boldsymbol{f}'(t) = [\cos t, 2tsent^2, 2t]$ *y* $\boldsymbol{f}(0) = [1, 0, 3]$
Integrando $\boldsymbol{f}'(t)$ *obtenemos*
$\boldsymbol{f}(t) = [sent + c_1, -\cos t^2 + c_2, t^2 + c_3]$
como $\boldsymbol{f}(0) = [1, 0, 3]$
$c_1 = 1$, $c_2 = 1$ *y* $c_3 = 3$
entonces $\boldsymbol{f}(t) = [sent + 1, -\cos t^2 + 1, t^2 + 3]$

Ejemplo 2.1.13 *Evaluar* $\int \left[\frac{1}{t}, \cos t, 3t\right] dt$
Integrando cada una de las funciones coordenadas obtenemos
$\int \left[\frac{1}{t}, \cos t, 3t\right] dt = \left[\ln t + c_1, sent + c_2, \frac{3}{2}t^2 + c_3\right]$

Si f *es una función real-vectorial definida y acotada en un intervalo* $I = [a, b]$, *entonces* $\int_a^b \boldsymbol{f}(t)dt = \left[\int_a^b f_k(t)dt\right]$

Teorema 2.1.1 *Si* f *es una función real-vectorial continua en un intervalo* $I = [a, b]$, *entonces* $\int_a^b \boldsymbol{f}(t)dt = \left[\int_a^b f_k(t)dt\right]$

Demostración. Utilizando la definición de integral definida en una variable

$\int_a^b \boldsymbol{f}(t)dt = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}(t_i^*)\triangle t$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left[\sum\limits_{i=1}^{n} f_k(t_i^*)\triangle t \right]$

$= \left[\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f_k(t_i^*)\triangle t \right]$

$= \left[\int_a^b f_k(t)dt \right]$ ■

Ejemplo 2.1.14 *Evaluar* $\int_1^4 \left[t, \sqrt{t}, e^t\right] dt$.

Integrando cada una de las funciones coordenadas y aplicando el teorema fundamental del cálculo.

$\int_1^4 t dt = \frac{t^2}{2}|_1^4 = \frac{15}{2}$

$\int_1^4 \sqrt{t} dt = \frac{1}{2\sqrt{t}}|_1^4 = -\frac{1}{4}$

$\int_1^4 e^t dt = e^t|_1^4 = e^4 - e$

Por lo tanto $\int_1^4 \left[t, \sqrt{t}, e^t\right] dt = \left[\frac{15}{2}, -\frac{1}{4}, e^4 - e\right]$

Propiedad 2.1.4 *Si* $\boldsymbol{f}$ *y* $\boldsymbol{g}$ *son funciones real-vectorial continuas en un intervalo* $I = [a, b]$ *y* c *es una constante, entonces:*

a. $\int_a^b (\boldsymbol{f}(t) \pm \boldsymbol{g}(t))dt = \int_a^b \boldsymbol{f}(t)dt \pm \int_a^b \boldsymbol{g}(t)dt$

b. $\int_a^b (c\boldsymbol{f}(t))dt = c\int_a^b \boldsymbol{f}(t)dt$

c. $\int_a^b (\boldsymbol{f}(t) \cdot \boldsymbol{g}(t))dt = \int_a^b \boldsymbol{f}'(t)dt \cdot \int_a^b \boldsymbol{g}(t)dt$

d. $\int_a^b (\boldsymbol{f}(t) \times \boldsymbol{g}(t))dt = \int_a^b \boldsymbol{f}(t)dt \times \int_a^b \boldsymbol{g}(t)dt$ *(en* $\mathbb{R}^3$*)*

Ejercicios sección 2.1.

1. Para la función real-vectorial determine la imagen de 1, h, $h + \triangle h$

   a) $\boldsymbol{f}(t) = \left[\sqrt{t}, \frac{1}{t}\right]$

   b) $\boldsymbol{f}(t) = [\ln t, e^t, t^t]$

   c) $\boldsymbol{f}(t) = [t, t^2, t^3, t^4]$

2. Para la función real-vectorial determine dominio, rango y gráfica.

   a) $\boldsymbol{f}(t) = [2t + 1, t^2]$

   b) $\boldsymbol{f}(t) = [3\cos t, 2sent]$

   c) $\boldsymbol{f}(t) = [t\cos t, tsent, t]$

3. Evaluar el límite.(si existe).

   a) $\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t^2+1},\frac{1}{t^2-1}\right]$
   b) $\lim_{t\to 0}\left[\frac{t}{sent},\frac{1}{\cos t}\right]$
   c) $\lim_{t\to 0}\left[\frac{e^t-1}{t},\frac{\sqrt{1+t}-1}{t},\frac{\cos t-1}{t}\right]$

4. Determinar la continuidad de la función real-vectorial.

   a) $\boldsymbol{f}(t)=\left[\frac{t+1}{t-1},\frac{t-1}{t+1}\right]$
   b) $\boldsymbol{f}(t)=\left[\ln t,\sqrt{t-1},sent\right]$
   c) $\boldsymbol{f}(t)=[\tan t,2^t,t-1]$

5. Para cada función real-vectorial.hallar $\boldsymbol{f}'(t)$ y $\boldsymbol{f}''(t)$

   a) $\boldsymbol{f}(t)=[e^{3t},sen(2t)]$
   b) $\boldsymbol{f}(t)=[2^t,\log t,t^3]$
   c) $\boldsymbol{f}(t)=\left[senht,\cosh t,\sqrt{t}\right]$

6. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función real-vectorial $\boldsymbol{f}$.

   a) $f(t)=[t+1,t^2+1,t^3+1]$, para $t=0$
   b) $f(t)=[e^t,e^{2t},e^{3t}]$ para $t=1$
   c) $f(t)=[sent,\cos t,t]$ para $t=\pi$

7. Encontrar los intervalos donde la función real-vectorial es suave.

   a) $\boldsymbol{f}(t)=[t^2,t^3]$
   b) $\boldsymbol{f}(t)=\left[\frac{2}{1+t},\frac{2t}{1+t}\right]$
   c) $\boldsymbol{f}(t)=\left[\sqrt{t},\sqrt[3]{t},\sqrt[4]{t}\right]$

8. Si $f(t)=$ y $g(t)=$ hallar

   a) $(f(t)\cdot g(t))'$
   b) $\left\|(f(t)+g(t))'\right\|$
   c) $(f(t)\times g(t))$

9. Hallar $f(t)$ para las condiciones dadas.

   a) $\boldsymbol{f}'(t) = \left[2t, \sqrt{t}\right]$, $\boldsymbol{f}(0) = [1, 2]$

   b) $\boldsymbol{f}'(t) = \left[2t, 3t^2, \sqrt{t}\right]$, $\boldsymbol{f}(1) = [1, 1, 0]$

   c) $\boldsymbol{f}'(t) = [t, e^t, te^t]$, $\boldsymbol{f}(0) = [1, 1, 1]$

10. Evaluar la integral de la función real-vectorial

    a) $\int [e^t, 3t, \ln t]\, dt$

    b) $\int_0^1 [t, e^t, te^t]\, dt$

    c) $\int_0^{\pi/4} [\cos t, sent, \sec^2]\, dt$

11. Si $\boldsymbol{f}$ es derivable demuestre que $\|\boldsymbol{f}(t)\|$ es constante si y solamente si $\boldsymbol{f}(t) \cdot \boldsymbol{f}'(t) = 0$

12. Hallar los puntos sobre la curva determinada por la función $f(t) = [t, 1 + t^2]$ en los que:

    a) $\boldsymbol{f}(t)$ y $\boldsymbol{f}'(t)$ son perpendiculares.

    b) $\boldsymbol{f}(t)$ y $\boldsymbol{f}'(t)$ son paralelos con el mismo sentido.

    c) $\boldsymbol{f}(t)$ y $\boldsymbol{f}'(t)$ son paralelos con sentido contrario.

13. Utilizando un CAS construya una función que permita graficar una funcíon real-vectorial y su recta tangente en un punto dado.

2.2. Aplicaciones

Se puede representar el movimiento de una particula en el plano o en el espacio utilizando una función de variable real y valor vectorial, luego utilizar la primera y segunda derivada de esta función para determinar la velocidad y la aceleración de la particula. A partir de la posición de una particula y bajo ciertas condiciones es posible hallar la velocidad, la aceleración y la rápidez de la particula

Si una función real vectorial f determina la posición de un objeto en el plano o en el espacio y f tiene primera y segunda derivada, entonces:
velocidad del objeto es $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{f}'(t)$,
dirección del movimiento del objeto es $\dfrac{\boldsymbol{v}(t)}{\|\boldsymbol{v}(t)\|}$,
aceleración del objeto es $\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{f}''(t)$
rapidez del objeto es $\|\boldsymbol{v}(t)\| = \|\boldsymbol{f}'(t)\|$

Ejemplo 2.2.1 *Hallar la velocidad, la dirección, la aceleración y la rapidez de una partícula que se mueve a lo largo de la hélice circular determinada por* $\boldsymbol{f}(t) = [a\cos t, asent, bt]$ *con* $a > 0$ *y* $b > 0$.

Velocidad $\boldsymbol{v}(t) = [-asent, acost, b]$

Dirección $\left[-\dfrac{asent}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\dfrac{a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$

Aceleración $\boldsymbol{a}(t) = [-a\cos t, -asent, 0]$

Rapidez $\|\boldsymbol{v}(t)\| = \sqrt{a^2+b^2}$

El matemático suizo John Bernoulli[2] mostro que entre las curvas posibles que unen dos puntos A y B, una particula tomará el menor tiempo posible de deslizamiento de A a B si la curva es parte de un arco invertido de una cicloide.

Consideremos el objeto como un proyectil y supongamos que la unica fuerza que actua sobre el después de su lanzamiento, es la gravedad. Supongamos que el movimiento ocurre en un plano vertical que puede representarse por el plano xy y el origen un punto sobre la superficie de la tierra. La fuerza gravitatoria para un proyectil de masa m es $\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{j}$ donde $g = 32$ $pies/seg^2$ o $g = 9{,}81$ m/seg^2, por la segunda ley del movimiento de Newton esta misma fuerza produce una aceleración $\boldsymbol{a}(t)$ tal que $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}(t)$ luego $-mg\boldsymbol{j} = m\boldsymbol{a}(t)$ entonces $\boldsymbol{a}(t) = -g\boldsymbol{j}$ es la aceleración del proyectil.

Teorema 2.2.1 *Despreciando la resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil lanzado de una altura inicial* h *con rapidez inicial* v_0 *y ángulo de elevación* θ *se describe por medio de la función real-vectorial* $f(t) = (v_0\cos\theta)t\boldsymbol{i} + \left(h + (v_0 sen\theta)t - \dfrac{1}{2}gt^2\right)\boldsymbol{j}$ *donde* g *es la constante de gravedad.*


[2]



Johann Bernoulli (Basilea, Suiza 27 de julio de 1667 - misma ciudad, 11 de enero de 1748), también conocido como Jean o John, fue un matemático, médico y filólogo suizo. Su padre de religión calvinista deseaba que su hijo se convirtiera en comerciante y aceptó entrar como aprendiz en el negocio familiar de especias y medicinas, pero terminó por hacerlo tan mal que su contrariado padre se vio obligado a rectificar su orientación originaria, entonces su padre decidió que se convirtiera en médico, profesión también relacionada con el negocio familiar. En 1683 ingresa en la Universidad de Basilea y saca el título de médico, sin embargo durante este tiempo junto a su hermano Jakob también se dedicó a aprender el lenguaje de los números. Las novedades matemáticas de Leibniz sobre el cálculo infinitesimal cautivaron a ambos hermanos. En 1691 viaja a París para guiar a los matemáticos franceses en el uso del cálculo entre los cuales se hallaba el marqués de Guillaume de l'Hôpital. En Francia se convirtió en defensor de Leibniz en la polémica que mantenía con Isaac Newton por quien había sido el primero en enunciar los principios del cálculo infinitesimal. Se centró en el cálculo infinitesimal y resolvió la ecuación diferencial de Bernoulli, propuesta por su hermano. Sus hijos Nicolau, Daniel y Johann Bernoulli fueron grandes matemáticos.

Demostración. Integrando la aceleración $\boldsymbol{a}(t) = -g\boldsymbol{j}$ dos veces obtenemos

$\boldsymbol{v}(t) = \int \boldsymbol{a}(t)dt = \int -g\boldsymbol{j}\,dt = -gt\boldsymbol{j} + \boldsymbol{c}_1$

$\boldsymbol{f}(t) = \int \boldsymbol{v}(t)dt = \int(-gt\boldsymbol{j} + \boldsymbol{c}_1)dt = -\frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{j} + c_1t + c_2$

Usando el siguiente hecho $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0$ y $\boldsymbol{f}(0) = \boldsymbol{f}_0$ hallamos c_1 y c_2

$c_1 = \boldsymbol{v}_0$ y $c_2 = \boldsymbol{f}'_0(t)$

luego $f(t) = -\frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{v}_0t + \boldsymbol{f}_0$

utilizando las condiciones iniciales $\boldsymbol{f}_0 = h\boldsymbol{j}$, $v_0 = \|\boldsymbol{v}_0\|$

$\boldsymbol{v}_0 = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = \|\boldsymbol{v}_0\|\cos\theta\boldsymbol{i} + \|\boldsymbol{v}_0\|\, sen\theta\, \boldsymbol{j} = v_0\cos\theta\boldsymbol{i} + v_0 sen\theta\boldsymbol{j}$

por lo tanto $\boldsymbol{f}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{j} + (v_0\cos\theta\boldsymbol{i} + v_0 sen\theta\boldsymbol{j})t + h\boldsymbol{j}$

$= v_0\cos\theta t\boldsymbol{i} + \left(h + v_0 sen\theta t - \frac{1}{2}gt^2\right)\boldsymbol{j}$ ■

Para el movimiento de un proyectil cuando se lanza desde el origen sobre una superficie horizontal con una rapidez inicial v_0 y un ángulo de lanzamiento θ.

Altura máxima $y_{\text{máx}} = \dfrac{(v_0 sen\theta)^2}{2g}$

Tiempo de vuelo $t = \dfrac{2v_0 sen\theta}{g}$

Alcance $x_{\text{máx}} = \dfrac{v_0^2}{g} sen(2\theta)$

Ejemplo 2.2.2 *Un proyectil se dispara con una rapidez inicial de* $500\ m/s$ *con un ángulo de elevación de* 45^0

Consideremos $v_0 = 500\ m/s$, $\theta = 45^0$ *y* $g = 9{,}8\ m/s^2$

altura máxima $y_{\text{máx}} = \dfrac{(500 * sen45^0)^2}{2(9{,}8)} = 6377{,}55\ m$

tiempo de vuelo $t = \dfrac{2 * 500 * sen45^0}{9{,}8} = 72{,}15\ s$

alcance $x_{\text{máx}} = \dfrac{500^2}{9{,}8} sen(90^0) = 25510{,}2\ m$

Si una función real-vectorial f *representa una curva suave* C *en un intervalo abierto* I *entonces el vector* $T(t) = \dfrac{\boldsymbol{f}'(t)}{\|\boldsymbol{f}'(t)\|}$ *es un vector tangente unitario a* C *y el vector* $N(t) = \dfrac{\boldsymbol{T}'(t)}{\|\boldsymbol{T}'(t)\|}$ *con* $T'(t) \neq 0$ *es un vector normal unitario a* C

Ejemplo 2.2.3 *Para la curva determinada por* $f(t) = [3sent, 3\cos t, 4t]$ *determine* T *y* N

Hallamos $\boldsymbol{v}(t) = [3\cos t, -3sent, 4]$ *y* $\|\boldsymbol{v}(t)\| = 5$

luego $T(t) = \left[\dfrac{3\cos t}{5}, -\dfrac{3sent}{5}, \dfrac{4}{5}\right]$

y $N(t) = [-sent, -\cos t, 0]$

Una curva puede representarse por medio de diferentes funciones real-vectorial, o se pueden parametrizar de diferentes formas, dependiendo del parámetro que se elija.

Teorema 2.2.2 *La longitud de una curva continuamente diferenciable* C *determinada por* $\boldsymbol{f}(t)$, *para* $t \in [a,b]$ *es* $s = \int_a^b \|\boldsymbol{f}'(t)\|\, dt$

La longitud de arco es independiente de la parametrización que se utilice.

Si C es una curva suave determinada por una función $\boldsymbol{f}(t)$ definida en un intervalo $[a,b]$. Para $a \leq t \leq b$, la función longitud de arco está dada por $s(t) = \int_a^t \|\boldsymbol{f}'(u)\|\, du$. A la longitud de arco tambien se denomina parámetro longitud de arco y es una función nonegativa.

Utilizando el teorema fundamental del cálculo podemos ver que $\dfrac{ds}{dt} = \|\boldsymbol{f}'(t)\|$ y en forma diferencial es $ds = \|\boldsymbol{f}'(t)\|\, dt$

Ejemplo 2.2.4 *Encuentre la longitud de la curva determinada por* $f(t) = [\cos t, sent, \ln\cos t]$, $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{4}$

$\boldsymbol{f}'(t) = [-sent, \cos t, \tan t]$ *y* $\|\boldsymbol{f}'(t)\| = \sqrt{1 + \tan^2 t}$

$s = \int_0^{\pi/4} \sec t dt = \ln\tan\left(\dfrac{2t+\pi}{4}\right)|_0^{\pi/4} = \ln\tan\dfrac{3\pi}{8} - \ln\tan\dfrac{\pi}{4} \approx 0{,}88$

Si C es una curva suave determinada por una función $\boldsymbol{f}(t)$, la curvatura K en t está dada por $K = \dfrac{\|\boldsymbol{T}'(t)\|}{\|\boldsymbol{f}'(t)\|}$

Si C es una curva suave determinada por una función $\boldsymbol{f}(s)$ donde s es el parámetro longitud de arco, la curvatura K en s está dada por $K = \left\|\dfrac{dT}{ds}\right\| = \|T'(s)\|$

En un circulo tiene la misma curvatura en todos sus puntos.

Teorema 2.2.3 *En un circulo de radio* r *la curvatura es igual a* $\dfrac{1}{r}$

Ejemplo 2.2.5 *Encuentre la curvatura de* $\boldsymbol{f}(t) = [t, t^2, t^3]$, *en el punto* $(1,1,1)$

$\boldsymbol{f}'(t) = [1, 2t, 3t^2]$ *y* $\|\boldsymbol{f}'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$

de modo que $\boldsymbol{T}(t) = \dfrac{\boldsymbol{f}'(t)}{\|\boldsymbol{f}'(t)\|} = \dfrac{[1, 2t, 3t^2]}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}$

y $\|\boldsymbol{T}'(1)\| = \dfrac{\sqrt{19}}{7}$, $\|\boldsymbol{f}'(1)\| = \sqrt{14}$

entonces $K = \dfrac{\sqrt{19}}{7\sqrt{14}} \approx 0{,}166$

Ejercicios sección 2.2.

1. Para la función f determine velocidad, dirección, aceleración y rapidez.

   a) $\boldsymbol{f}(t) = [1 - \cos t, 1 - sent]$

   b) $\boldsymbol{f}(t) = [1 - \cos t, 1 - sent]$

   c) $\boldsymbol{f}(t) = [1 - \cos t, 1 - sent]$

2. Determine la longitud de la curva determinada por

   a) $\boldsymbol{f}(t) = [1 - \cos t, 1 - sent]$, $0 \leq t \leq \pi$

   b) $\boldsymbol{f}(t) = [t, \ln t, t \ln t]$, $1 \leq t \leq 2$

   c) $\boldsymbol{f}(t) = \left[2t, 4t^{3/2}, 3t^2\right]$, $0 \leq t \leq 1$

3. Hallar la curvatura de f donde s es el parámetro de longitud de arco.

   a) $\boldsymbol{f}(s) = [2 + s, 3]$

   b) $\boldsymbol{f}(s) = [2 + s, 3]$

4. Hallar la curvatura de

   a) $\boldsymbol{f}(t) = [\cos \pi t, sen 2\pi t]$

   b) $\boldsymbol{f}(t) = [e^t \cos t, e^t sent]$

   c) $\boldsymbol{f}(t) = [1, t, t^2]$

5. Determine la altura máxima, el iempo de vuelo y el alcance de un proyectil lanzado desde el origen con los siguientes datos.

   a) $v_0 = 500\ m/s$, $\theta = 60^0$

   b) $v_0 = 300\ m/s$, $\theta = 45^0$

   c) $v_0 = 600\ m/s$, $\theta = 30^0$

6. Un proyectil se lanza desde el suelo con un ángulo de 15^0 con el piso. El proyectil debe alcanzar un blanco a 150 pies de distancia. Determine la velocidad inicial requerida.

7. Hallar al ángulo con el que debe lanzarse un objeto para que

   a) Tenga la máxima altura

   b) Tenga el máximo alcance

8. Un objeto de masa m sigue una trayectoria cuya posición en cada insante esta determinada por $f(t) = [a\cos t, bsent]$, hallar la fuerza que actua sobre el objeto.

9. En los juegos olimpicos de Beiging la bielorusa Aksana Miankova lanzo un martillo de 4 Kg. con un ángulo de 40^0 con respecto a el suelo, con una velocidad inicial de 28,35 m/seg y obtuvo la medalla de oro, determine:

   a) Alcance del martillo.

   b) Máxima altura alcanzada por el martillo.

10. Cual es la longitud de un camino constante. $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{c}$

11. Para la helice determinada por $\boldsymbol{f}(t) = [a\cos t, asent, bt]$, con $a, b > 0$ cual es la máxima curvatura para un valor fijo b.

12. Utilizando un CAS construya una función que determine la curvatura.

2.3. Campos escalares

Existen muchas funciones de valor real que dependen de dos o más variables reales por ejemplo el volumen V de un cilindro circular recto, depende de su altura h y de su radio r, o la temperatura de una particula en el espacio depende de sus coordenadas x , y y z, la velocidad de una reacción quimica depende de la temperatura y de la presión del medio ambiente en que ocurre. En esta sección se estudiaran funciones de valor real que dependen de más de una variable real, o sea funciones reales de variable vectorial, funciones cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y de imagenes números reales, denominadas campos escalares.

Una función F cuyo dominio es un subconjunto D de R^n con $n \geq 2$ y cuyo rango es R se denomina campo escalar, F es una función de variable vectorial y valor real.

Notación 3 $F{:}D \subseteq \mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}$ *con* $\boldsymbol{z} = F(\boldsymbol{x})$ *donde* $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in U$ *y* $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}$

Nota : Cuando se trabaja en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$ es usual usar x, y y z en lugar de x_1, x_2 y x_3, y ademas $z = F(x, y)$ o $w = F(x, y, z)$

Propiedad 2.3.1 *Si F es un campo escalar de $D \subseteq \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, entonces:*

(i) El dominio de F es el mayor subconjuto D de $\mathbb{R}^n$ en el que F esta definido, o sea el conjunto de las $\boldsymbol{x}$ tales que $F(\boldsymbol{x})$ existe.

(ii) El codominio de F es $\mathbb{R}$.

(iii) El rango o recorrido de F es el conjunto $F(D)$, o sea el conjunto de puntos $F(\boldsymbol{x})$ para cada $\boldsymbol{x} \in D$.

Ejemplo 2.3.1 *El campo escalar* $F(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ *asocia a cada* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *un único número real* $2x^2 + 3y^2$, *luego si* $(x, y) = (1, -2)$ $F(1, -2) = 14$.

El dominio de F *es todo* $\mathbb{R}^2$ *pues* $2x^2 + 3y^2$ *esta definido para toda pareja* (x, y) *de* $\mathbb{R}^2$

El rango de F *es el conjunto de los* $z \in \mathbb{R}$ *no negativos pues* $2x^2 + 3y^2 \geq 0$ *para toda pareja* (x, y) *de* $\mathbb{R}$

Si F es un campo escalar de dos variables entonces el dominio D de F es una región del plano xy, si F es de tres variables, enonces su dominio D es una región del espacio.

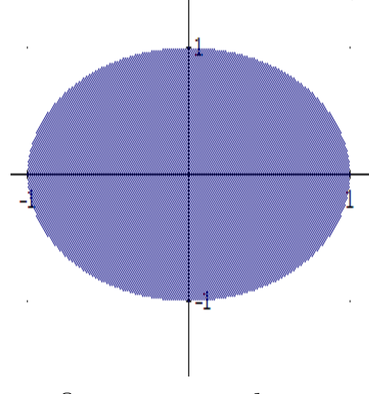
Ejemplo 2.3.2 *Determine el dominio de los siguientes campos escalares, de manera algebraica y geometríca.*

a. $F(x, y) = \dfrac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{xy}$ *b:* $F(x, y) = \ln(xy)$

a. La expresión $\dfrac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{xy}$ *es válida si* $xy \neq 0$ *y* $1 - x^2 - y^2 > 0$

$xy \neq 0$ *si* $x \neq 0$ *y* $y \neq 0$, $1 - x^2 - y^2 > 0$ *si* $x^2 + y^2 < 1$

$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1, x \neq 0,\ y \neq 0\}$



graficamente son los puntos del circulo, sin los ejes.

b. La expresiòn $\ln(xy)$ *es vàlida si* $xy > 0$

$x > 0$ *y* $y > 0$, *o* $x < 0$ *y* $y < 0$

$D = \{(x, y) | xy > 0\}$

graficamente los puntos del primer y tercer cuadrante, sin los ejes.

Existen funciones que pueden estar definidas por una tabla y no por una fórmula.

Ejemplo 2.3.3 *La siguiente tabla muestra el valor de un plan (en miles de pesos) en telefonia celular, x representa el número de minutos utilizados en el operador Kassir, y representa el número de minutos utilizados en otros operadores.*

$x \setminus y$	0	100	200
200	35	60	80
300	50	70	85
500	70	90	100

Se ve que un plan de 300 minutos en plan Kassir y 100 minutos en otros operadores cuesta $70.000

El plan más economico vale $35.000 y consta de 200 minutos solamente al operador Kassir.

Ejemplo 2.3.4 *Para la función de producción de Cobb-Douglas*[3] $P(L,K) = 50L^{0,6}K^{0,4}$, *$L$ representa la cantidad de mano de obra (horas trabajadas en un año) y K representa al capital invertido (maquinaria, equipo y sedes, en miles de dólares). Para 150 horas trabajadas en un año y 200 mil dólares en capital invertido la producción será de* $P(150,200) = 50(150)^{0,6}(200)^{0,4} = 8414{,}66$

Dos campos escalares F y G de $D \subseteq \mathbb{R}^n$en $\mathbb{R}$ son iguales si $F(\boldsymbol{x}) = G(\boldsymbol{x})$ para todo $\boldsymbol{x}$ de U, entonces deben tener igual dominio e igual rango.

Ejemplo 2.3.5 *Los campos escalares $F(x,y) = Lnxy$ y $G(x,y) = Lnx + Lny$ no son iguales.porque tienen diferente dominio.*

Dominio de F es $\{(x,y)|xy > 0\}$ y dominio de G es $\{(x,y)|x > 0 \text{ y } y > 0\}$

Los campos escalares $F(x,y) = |x+y|$ y $G(x,y) = |x| + |y|$ no son iguales aunque tienen igual dominio $\mathbb{R}^2$

Pues tienen imagenes diferentes. contraejemplo $F(1,-1) = 0$ y $G(1,-1) = 2$

Propiedad 2.3.2 *Si F es un campo escalar de $D \subseteq \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, entonces se dice que:*

3

En economía, la función Cobb-Douglas es una forma de función de producción, ampliamente usada para representar las relaciones entre un producto y las variaciones de los insumos tecnología , trabajo y capital. Fue propuesta por Knut Wicksell (1851-1926) e investigada con respecto a la evidencia estadística concreta, por Charles Cobb y Paul Douglas en 1928. El establecimiento de la función partió de la observación empírica de la distribución de la renta nacional total de Estados Unidos entre el capital y el trabajo. Los datos mostraron que se mantenía más o menos constante a lo largo del tiempo y a medida que crecía la producción, la renta del total de los trabajadores crecía en la misma proporción que la renta del conjunto de los empresarios. Douglas solicitó a Cobb establecer una función que resultara en participación constante de los dos factores si ganaban en su producto marginal.

(i) F es inyectivo o uno a uno si a cada elemento del rango de F le corresponde exactamente un elemento del dominio de F. Si $F(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{y})$ entonces $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ o si $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ entonces $F(\boldsymbol{x}) \neq F(\boldsymbol{y})$

(ii) F es sobreyectivo si el codominio de F es igual al rango de F. O sea si todo $F(\boldsymbol{x})$ del codominio de F proviene de por lo menos un elemento $\boldsymbol{x}$ del dominio de F.

(iii) F es biyectivo si F es inyectivo y sobreyectivo.

Propiedad 2.3.3 *Algunos tipos de campos escalares. Si $F\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es un campo escalar se dice que F es:*

(i) Campo escalar constante si $F(\boldsymbol{x}) = c$ (Constante) $\forall \boldsymbol{x} \in D$

(ii) Campo escalar lineal si $F(\boldsymbol{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b$ o $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{x} + b$ con $b \in \mathbb{R}$ y a_i reales no todos cero.

(iii) Campo escalar polinomial si $F(\boldsymbol{x}) = a_1x_1^{r_1} + a_2x_2^{r_2} + ... + a_nx_n^{r_n} + b$ con a_i,$b \in \mathbb{R}$ y $ri \in \mathbb{N}$.

(iv) Campo escalar racional si $F(\boldsymbol{x}) = \dfrac{G(\boldsymbol{x})}{H(\boldsymbol{x})}$ Con $G(\boldsymbol{x})$ y $F(\boldsymbol{x})$ campos escalares polinomiales.

(v) Campo escalar máximo (de n números) $F(\boldsymbol{x}) = \text{máx}(x_1, x_2, ..., x_n) = x_M$ tal que $x_M \geq x_i$, $\forall i = 1, 2, ..., n$

(vi) Campo escalar mínimo (de n números) $F(\boldsymbol{x}) = \text{mín}(x_1, x_2, ..., x_n) = x_m$ tal que $x_m \leq x_i$, $\forall i$=$1, 2, ..., n$

Si F es un campo escalar de $D \subset R^n$ en R y g una función de $I \subset R$ en R, entonces goF es un campo escalar de $D \subset R^n$ en R.

Nota : No se pueden componer dos campos escalares

Ejemplo 2.3.6 *Si $F\left(x - y, \dfrac{y}{x}\right) = y^2 - x^2$ halle $F(x, y)$ y su dominio.*

Haciendo $u = x - y$ y $v = \dfrac{y}{x}$ y resolviendo el sistema para x y y,obtenemos $x = \dfrac{u}{1 - v}$ y $y = \dfrac{uv}{1 - v}$

entonces $F(u, v) = \left(\dfrac{uv}{1 - v}\right)^2 - \left(\dfrac{u}{1 - v}\right)^2$ luego $F(x, y) = \left(\dfrac{xy}{1 - y}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{1 - y}\right)^2 = -\dfrac{x^2(1 - y^2)}{(1 - y)^2} = -\dfrac{x^2(1 + y)}{1 - y}$

El dominio de F es $\{(x, y)|y \neq 1\}$

Propiedad 2.3.4 *Si F es un campo escalar de $D_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ y G es un campo escalar de $D_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, entonces definimos los siguientes camos escalares.*

(i) $kF : D_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, con $k \in \mathbb{R}$ tal que $(kF)(\boldsymbol{x}) = kF(\boldsymbol{x})$

(ii) $F \pm G : D_1 \cap D_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, tal que $(F \pm G)(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}) \pm G(\boldsymbol{x})$

(iii) $F\bullet\mathbf{G} : D_1 \cap D_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, tal que $(F\bullet\mathbf{G})(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}) \bullet G(\boldsymbol{x})$

(iv) $\dfrac{F}{G}$: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, tal que $\left(\dfrac{F}{G}\right)(\boldsymbol{x}) = \dfrac{F(\boldsymbol{x})}{G(\boldsymbol{x})}$, donde $E = D_1 \cap D_2 - \{x \in D_2|G(x) = 0\}$

Ejercicios sección 2.3.

1. En las siguientes expresiones determine si es posible expresar a z como una función de x y y ($z = F(x,y)$), a y como función de x y z ($y = G(x,z)$), a x como una función de y y z ($x = H(y,z)$)

   a) $xy + yz + xz = 3$
   b) $\ln(x + 2y + 3z) = 0$
   c) $sen(x + y) + \cos(y + z) = 1$

2. Para los campos escalares dados determine la imagen de $(k,0)$, $(0,k)$, (k,k), $(x + \triangle x, y)$ y $(x, y + \triangle y)$

   a) $F(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
   b) $F(x,y) = SenxCosy$
   c) $F(x,y) = Ln(xy + x + y)$

3. Para los campos escalares dados determine para que valores de (x,y), $F(x,y) = k$. A donde envia F los puntos de la recta $y = x$. A donde envia F los puntos del circulo unitario $x^2 + y^2 = 1$

   a) $F(x,y) = x + y$
   b) $F(x,y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$
   c) $F(x,y) = Sen(x^2 + y^2)$

4. Para los campos escalares dados determine dominio y rango.

   a) $F(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$
   b) $F(x,y) = Ln(xLny)$
   c) $F(x,y,z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$

5. Para los campos escalares dados grafique su dominio y determine que tipo de conjunto es.

   a) $F(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
   b) $F(x,y) = sen^{-1}(x - y)$
   c) $F(x,y) = e^{-x^2 - y^2}$

6. Determine si los campos escalares dados son iguales o no, justificando su respuesta.

a) $F(x,y) = |xy|$ y $G(x,y) = |x|\,|y|$

b) $F(x,y) = \sqrt{xy}$ y $G(x,y) = \sqrt{x}\sqrt{y}$

c) $F(x,y) = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$ y $G(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

7. Para los campos escalares F y G dados determine $F+G$, FG, $\dfrac{F}{G}$ y sus respectivos dominios.

   a) $F(x,y) = x+y\,,\ G(x,y) = x-y$

   b) $F(x,y) = \sqrt{x+y+1}\,,\ G(x,y) = \sqrt{xy}$

   c) $F(x,y,z) = \dfrac{x+y+z}{x-y-z}\,,\ G(x,y,z) = \dfrac{1}{x+y+z}$

8. Determine $F(x,y)$ y su dominio.

   a) $F(x+y, x-y) = x^2+y^2$

   b) $F(x-y, x+y) = \dfrac{x}{y} + 1$

   c) $F(\frac{x}{y}, xy) = xy + 1$

9. Para el campo escalar dado F y la funcion dada g, determine goF

   a) $F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,,\ g(t) = \dfrac{1}{t}$

   b) $F(x,y) = (x+2)^{y+3}\,,\ g(t) = Ln\dfrac{1}{t}$

   c) $F(x,y,z = Tan(x+y+z)\,,\quad g(t) = e^t$

10. Para el campo escalar determine dominio y rango.

    a) $F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{12xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

    b) $F(x,y) = \begin{cases} x^2+4y^2 & \text{si } x^2+4y^2 \leq 5 \\ 3 & \text{si } x^2+4y^2 > 5 \end{cases}$

    c) $F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y^3+1} & \text{si } y \neq -1 \\ 0 & \text{si } y = -1 \end{cases}$

11. De una interpretacion geometrica del campo escalar $F(\boldsymbol{x}) = x_i$, ($x_i =$i-esima coordenada de $\boldsymbol{x}$)

12. Se depositan \$50000 en un titulo de ahorro a una tasa de interés compuesto contiuamente r durante t años. Construya una tabla para determinar la cantidad para $r = 0{,}02,\ 0{,}05,\ 0{,}10,\ 0{,}15$ y $t = 1, 5, 10, 20$

13. La temperatura en un punto (x, y) de una placa de metal plana está determinda por $T(x, y) = \dfrac{40}{1 + x^2 + y^2}$ donde T se mide en grados centigrados, x, y en metros. Elija cuatro puntos de la placa (uno en cada cuadrante) y halle su temperatura.

14. Utilizando un CAS construya un campo escalar y evaluelo en varios puntos.

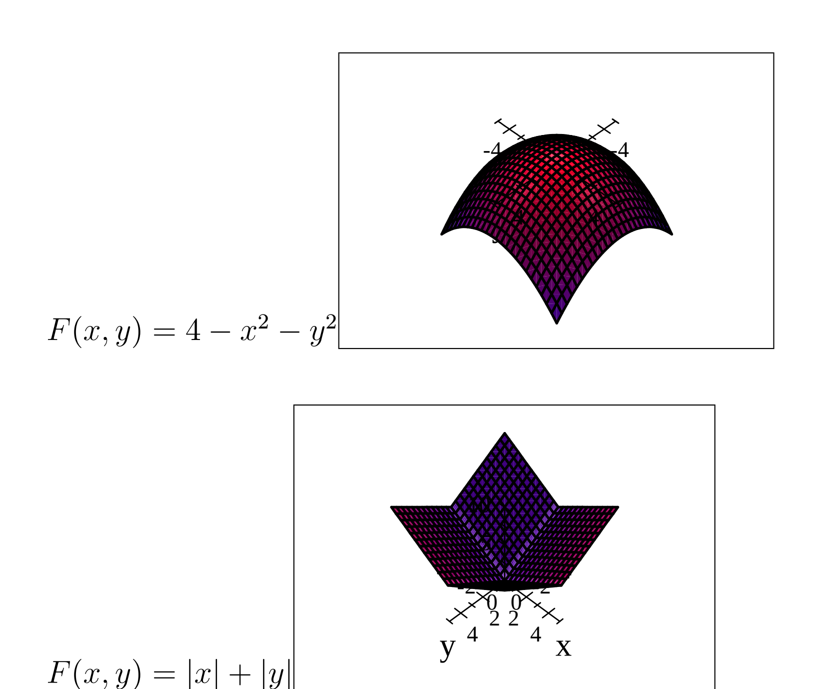
2.4. Geometría de campos escalares.

Si F es un campo escalar de $D \subseteq \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, definimos la gráfica de F como un conjunto de puntos de $\mathbb{R}^{n+1}$ tales que gráfica $f = \{(x_1, x_2, ..., x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} | f(x_1, x_2, ..., x_n) \in D\}$

Nota: Los unicos campos escalares que se pueden graficar de manera convencional son los de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y su gráfica es una superficie.

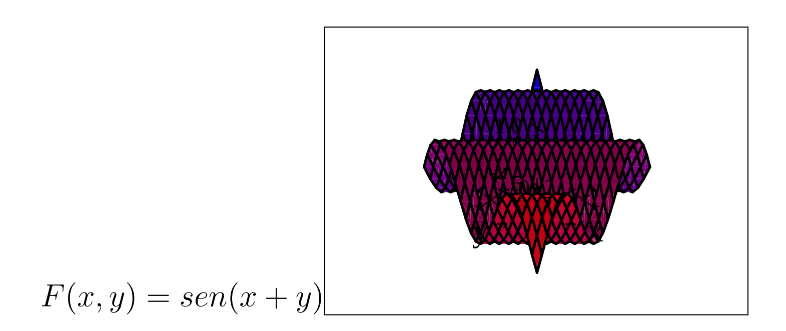
Si F es un campo escalar de $D \subseteq \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ un conjunto de nivel es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ en el que F es constante. Si $n = 2$ los conjuntos de nivel se denominan curvas de nivel y se obtienen intersectando la superficie con un plano horizontal. Si $n = 3$ los conjuntos de nivel se denominan superficies de nivel.

Ejemplo 2.4.1 *Graficas de algunos campos escalares*

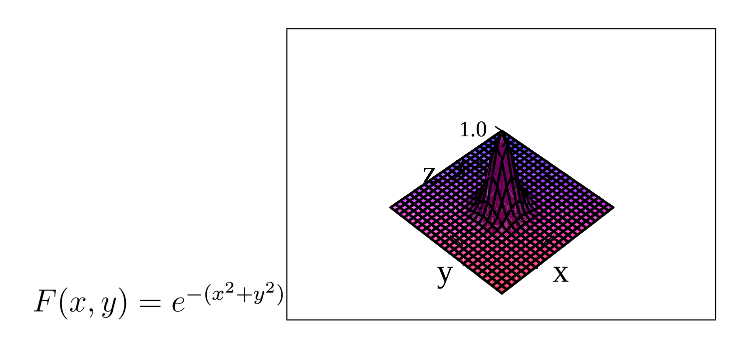


$F(x, y) = 4 - x^2 - y^2$

$F(x, y) = |x| + |y|$



$F(x, y) = sen(x + y)$

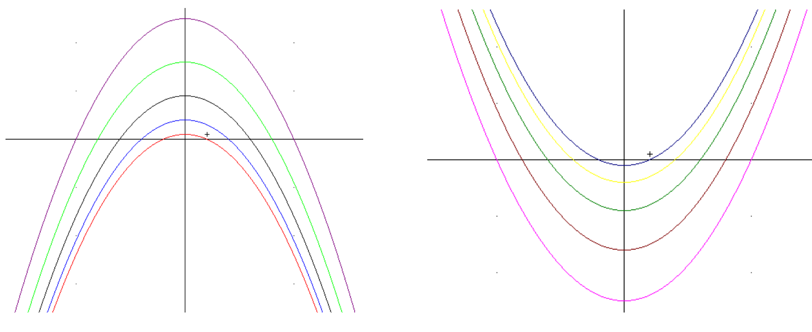


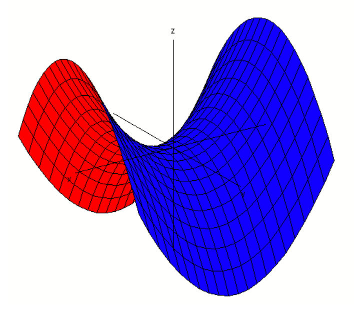
$F(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$

Para un campo escalar $F(x, y)$, la gráfica de la funcion que se obtiene al mantener fija x y hacer variar a y se denomina seccion transversal de F con x fija, la grafica de $F(x, y)$ con $x = k$ es una curva o seccion transversal que se obtiene intersectando la grafica de F con el plano $x = k$. De la misma forma se define seccion transversal de F con y fija.

Ejemplo 2.4.2 *Describir las secciones transversales del campo escalar $F(x, y) = x^2 - y^2$ con x fija y luego con y fija, luego describa la forma de la grafica de F.*

Las secciones transversales con x fija en $x = k$ son $F(k, y)$ cuyas graficas son parabolas que abren hacia abajo y las secciones transversales con y fija en $y = k$ son $F(x, k)$ cuyas graficas son parabolas que abren hacia arriba. La superficie es un paraboloide hiperbolico denomina silla de montar.

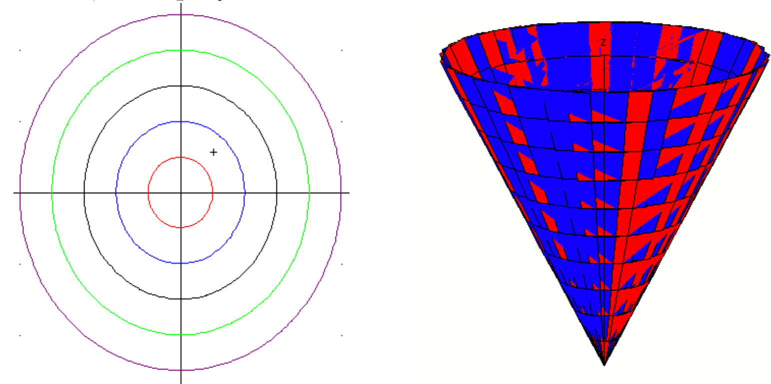




Las lineas de contorno o curvas de nivel de un campo escalar $F(x, y)$ son las curvas que se obtienen al intersectar la grafica de F con planos horizontales y cuyas ecuaciones son $F(x, y) = k$ o $z = k$ (k numero real).

Ejemplo 2.4.3 *Dibujar un diagrama de curvas de nivel de* $F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ *y relacionarlo con la grafica de* F*.*

Las curvas de nivel tienen por ecuación $\sqrt{x^2 + y^2} = k$ *para* $k \geq 0$ *y son circulos de radio* $\sqrt{k}$*, la superficie es un cono circular.*



La ley de Coulomb[4] determina que la magnitud de cada una de las fuerzas eléctricas con que interactúan dos cargas puntuales en reposo es directamente proporcional al producto



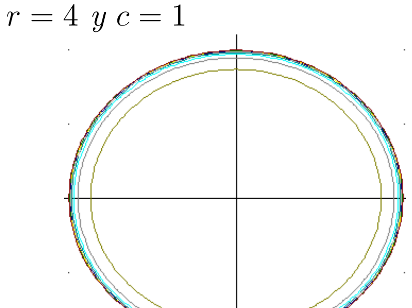
4



Charles-Augustin de Coulomb (Angoulême, Francia, 14 de junio de 1736 - París, 23 de agosto de 1806). Físico e ingeniero militar francés. Se recuerda por haber descrito de manera matemática la ley de atracción entre cargas eléctricas. En su honor la unidad de carga eléctrica lleva el nombre de coulomb (C). Entre otras teorías y estudios se le debe la teoría de la torsión recta y un análisis del fallo del terreno dentro de la Mecánica de suelos. Fue el primero en establecer las leyes cuantitativas de la electrostática, además de realizar muchas investigaciones sobre: magnetismo, rozamiento y electricidad. Sus investigaciones científicas están recogidas en siete memorias, en las que expone teóricamente los fundamentos del magnetismo y de la electrostática. En 1777 inventó la balanza de torsión para medir la fuerza de atracción o repulsión que ejercen entre si dos cargas eléctricas, y estableció la función que liga esta fuerza con la distancia. Con este invento, culminado en 1785, Coulomb pudo establecer el principio, que rige la interacción entre las cargas eléctricas, actualmente conocido como ley de Coulomb

de la magnitud de ambas cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.Si $V(x,y)$ es el potencial électrico en un punto (x,y) del plano xy, entonces las curvas de nivel de V se llaman curvas equipotenciales, porque en todos los puntos de ellas el potencial électrico es el mismo.

Ejemplo 2.4.4 *Trace algunas curvas equipotenciales si* $V(x,y) = \dfrac{c}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$ *para* $r = 4$ *y* $c = 1$



Es imposible visualizar un campo escalar F de mas de tres variables mediante una grafica, debido a que estaria en un espacio de dimension mayor o igual a cuatro. Sin embargo podemos saber sobre un campo escalar F de tres variables examinando sus superficies de nivel, que son superficies con ecuaciones $F(x,y,z) = k$ donde k es un numero real.

Ejemplo 2.4.5 *Describa las superficies de nivel de* $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$
Las superficies son esferas concentricas de radio $w = F(x,y,z)$, $w > 0$.

Ejercicios sección 2.4.

1. Grafique los campos escalares dados

   a) $F(x,y) = xy$
   b) $F(x,y) = ArcTan\frac{y}{x}$
   c) $F(x,y) = Ln(x^2 + y^2)$

2. Describir las secciones transversales del campo escalar

   a) $F(x,y) = 2 - x^2 - y^2$
   b) $F(x,y) = e^{-x^2-y^2}$
   c) $F(x,y) = xseny$

3. Dibujar un diagrama de curvas de nivel de los campos escalares dados

a) $F(x,y) = xy^2 - x^3$

b) $F(x,y) = xy^3 - yx^3$

c) $F(x,y) = Sen\sqrt{x^2+y^2}$

4. Describa las superficies de nivel de los campos escalares dados

a) $F(x,y,z) = x^2 + y^2$

b) $F(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$

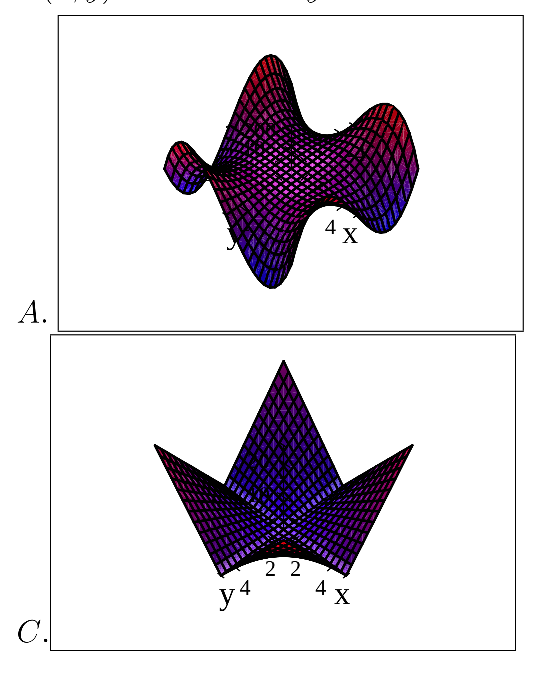
c) $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$

5. Relacione cada campo escalar con alguna de las gráficas A a C

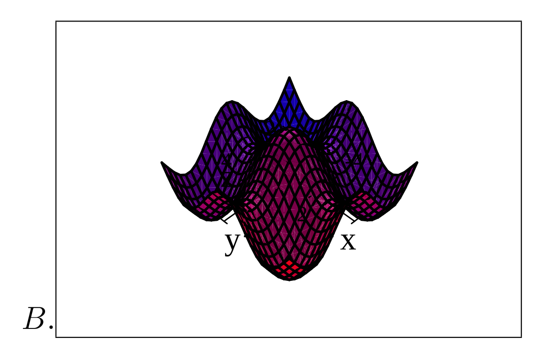
a) $F(x,y) = |xy|$

b) $F(x,y) = xy(y^2 - x^2)$

c) $F(x,y) = \cos x + \cos y$



$A.$



$B.$

$C.$

6. Determine donde se define G y como es la gráfica de G respecto a la gráfica de F, justifique su respuesta.

a) $G(x,y) = F(x-x_0, y-y_0)$ donde (x_0,y_0) es un punto dado de $\mathbb{R}^2$

b) $G(x,y) = F(kx,ky)$ donde $k \in \mathbb{R}$

c) $G(x,y) = -F(x,y)$

7. Una lamina de metal tiene una temperatura $T(x,y)$ en cada punto (x,y), las curvas de nivel de T se denomnan isotermas porque la temperatura es igual en todos los puntos de la curva. Para la función $T(x,y) = \dfrac{60}{1+x^2+2y^2}$ grafique algunas isotermas.

8. Utilizando un CAS construya una función que permita graficar las curvas de nivel de un campo escalar dado.

2.5. Funciones vectoriales

Una función F cuyo dominio es un subconjunto D de R^n y cuya imagen esta en R^m se denomina función vectorial si $n, m > 1$. F es una función de variable vectorial y valor vectorial.

Notación 4 $\boldsymbol{F}$:$D \subseteq \mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}^m$ *con* $\boldsymbol{z} = \mathbb{F}(\boldsymbol{x})$

Propiedad 2.5.1 *Si $\boldsymbol{F}$ es una función vectorial de $D \subseteq \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, entonces:*
(i) El dominio de $\boldsymbol{F}$ es el mayor subconjunto D de $\mathbb{R}^n$ en el que $\mathbb{F}$ esta definida, o sea el conjunto de las $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tales que $\mathbb{F}(\boldsymbol{x})$ existe.
(ii) El codominio de $\boldsymbol{F}$ es $\mathbb{R}^m$.
(iii) El rango o recorrido de $\boldsymbol{F}$ es el conjunto $\boldsymbol{F}(D)$, o sea el conjunto de puntos $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ para cada $\boldsymbol{x} \in D$.

Dos funciones vectoriales $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{G}$ de $D \subseteq \mathbb{R}^n$en $\mathbb{R}^m$ son iguales si $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$ para todo $\boldsymbol{x}$ de D, luego deben tener igual dominio e igual rango.

Si $\boldsymbol{F}$ es una función vectorial de $D \subseteq \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, entonces para cada z_i de $\boldsymbol{z}$, $F_i(\boldsymbol{x}) = z_i$ se denomina función componente o coordenada de $\boldsymbol{F}$. Las funciones componentes o coordenadas de una función vectorial $\boldsymbol{F}$ son funciones F_i denominadas campos escalares, que se trataron en la anterior sección. $(z_i = F(\boldsymbol{x}))$

Propiedad 2.5.2 *Una función vectorial $\boldsymbol{F}$ de $D_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ se dice que es lineal si satisface las siguientes condiciones:*
(i) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})$ para todo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ de D
(ii) $\boldsymbol{F}(k\boldsymbol{x}) = k\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\ \forall k \in \mathbb{R}$

Ejemplo 2.5.1 *La función vectorial $\boldsymbol{F}(x,y) = \left[\dfrac{1}{x+y}, \dfrac{1}{x-y}, \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right]$ asocia a cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ un único vector $\boldsymbol{F}(x,y) \in \mathbb{R}^3$ cuyas funciones coordenadas son*
$F_1(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$, $F_2(x,y) = \dfrac{1}{x-y}$ *y* $F_3(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.
Dominio de $F_1 = \{(x,y) | x \neq y\}$, Dominio de $F_2 = \{(x,y) | x \neq -y\}$ y Dominio de $F_3(x,y) = \{(x,y) | x \neq 0 \ \ y \ \ y \neq 0\}$.
Luego dominio de $\boldsymbol{F} = \{(x,y) | x \neq y \ \ y \ \ x \neq -y\}$

Propiedad 2.5.3 *Si* $\boldsymbol{F}$ *es una función vectorial de* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}^m$*, entonces:*

(i) $\boldsymbol{F}$ *es inyectiva o uno a uno si a cada elemento del rango de* $\boldsymbol{F}$ *le corresponde exactamente un elemento del dominio de* $\boldsymbol{F}$*. Si* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})$ *entonces* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ *o si* $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ *entonces* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})$

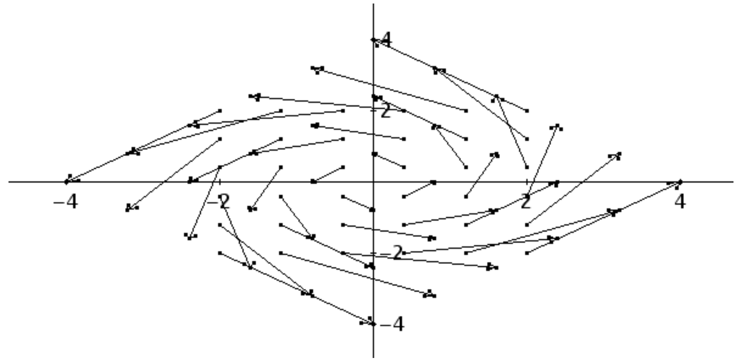
(ii) $\boldsymbol{F}$ *es sobreyectiva si el codominio de* $\boldsymbol{F}$ *es igual al rango de* $\boldsymbol{F}$*. O sea si todo* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ *del codominio de* $\boldsymbol{F}$ *proviene de por lo menos un elemento* $\boldsymbol{x}$ *del dominio de* $\boldsymbol{F}$*,.codominio de* $\boldsymbol{F}$ *es* $\mathbb{R}^m$*.*

(iii) $\boldsymbol{F}$ *es biyectiva si* $\boldsymbol{F}$ *es inyectiva y sobreyectiva.*

Ejemplo 2.5.2 *Sea* $\mathbf{F}(x, y) = [a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y]$ *veamos que si* F *es inyectivo entonces* F *es sobreyectivo. Supongamos que* $\boldsymbol{F}(x_1, y_1) = \boldsymbol{F}(x_2, y_2)$ *implica que* $x_1 = x_2$ *y* $y_1 = y_2$*, luego* $[x_1,y_1] = [x_2, y_2]$*, entonces* $\boldsymbol{F}$ *es inyectivo y como dominio de* $\boldsymbol{F}$ *es* $\mathbb{R}^2$ *y rango de* $\boldsymbol{F}$ *es* $\mathbb{R}^2$ *entonces* $\boldsymbol{F}$ *es sobreyectivo.*

Si en una función vectorial F *de* $D \subseteq R^n$ *en* R^m n *es igual a* m*, entonces* F *se denomina campo vectorial. La gráfica de un campo vectorial esta determinada por un conjunto de vectores en* R^n *de inicio* $x \in D$ *y extremo* $F(x)$*.*

Ejemplo 2.5.3 *Graficar algunos vectores del campo vectorial* $F(x, y) = [-y, x]$



Propiedad 2.5.4 *Algunos tipos de campos vectoriales. Si* $\boldsymbol{F} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *es un campo vectorial se dice que* $\boldsymbol{F}$ *es:*

(i) Campo vectorial constante si $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{k}]\ \forall \boldsymbol{x} \in D$

(ii) Campo vectorial identico (radial) si $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{x}] \quad \forall \boldsymbol{x} \in D$

(iii) Campo vectorial lineal si $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{x}] \quad \forall \boldsymbol{x} \in D$ *y* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$

(iv) Campo vectorial gradiente si $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \nabla F(\boldsymbol{x}) \quad \forall \boldsymbol{x} \in D$*, donde* F *es un campo escalar de* $D \subset \mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}$ *diferenciable en* $\boldsymbol{x}$

Algunos ejemlos fisicos de campos vectoriales son los campos de velocidades (describen el movimiento de un sistema de partìculas), los campos gravitatorios (los define la ley de gravitación de Newton[5]) y los campos de fuerzas electricas (los define la ley de Coulomb).

Si $\boldsymbol{F}$ es una función vectorial de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y $\boldsymbol{G}$ una función vectorial de $E \subset \mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^p$, entonces $\boldsymbol{G}$o$\boldsymbol{F}$ es una función vectorial de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^p$. $(E = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{D}))$

5

Ejemplo 2.5.4 *Sean* $\mathbf{F}(x,y) = [2x+3y, xy]$ *y* $\mathbf{G}(x,y) = \left[x-2y, \dfrac{x}{y}\right]$, *hallar* $\mathbf{F}o\mathbf{G}(x,y)$, $\mathbf{G}o\mathbf{F}(x,y)$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{G}(1,1))$ *y* $\mathbf{G}(\mathbf{F}(1,1))$.

$$\mathbf{F}o\mathbf{G}(x,y) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(x,y)) = \mathbf{F}\left(x-2y, \frac{x}{y}\right) = \left[2(x-2y) + 3\frac{x}{y}, (x-2y)\frac{x}{y}\right] = \left[2x-4y+\frac{3x}{y}, \frac{x^2-2xy}{y}\right]$$

$$\mathbf{G}o\mathbf{F}(x,y) = \mathbf{G}(\mathbf{F}(x,y)) = \mathbf{G}(2x+3y, xy) = \left[2x+3y-2xy, \frac{2x+3y}{xy}\right]$$

$$\boldsymbol{F}(\mathbf{G}(1,1)) = \mathbf{F}(-1,1) = (1,-1)$$

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}(1,1) = \boldsymbol{G}(5,1) = (3,5)$$

Propiedad 2.5.5 *Algebra de funciones vectoriales. Si* $\boldsymbol{F}$ *es una función vectorial de* $D_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}^m$ *y* G *es una función vectorial de* $D_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}^m$, *entonces definimos las siguientes funciones vectoriales.*

(*i*) $k\boldsymbol{F} : D_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}^m$, *con* $k \in \mathbb{R}$ *tal que* $(k\boldsymbol{F})(\boldsymbol{x}) = k\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$

(*ii*) $\boldsymbol{F} \pm G : D_1 \cap D_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}^m$, *tal que* $(\boldsymbol{F} \pm G)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \pm G(\boldsymbol{x})$

Ejercicios sección 2.5

1. Para las funciones vectoriales dadas determine dominio y rango.

   a) $\boldsymbol{F}(x,y) = [x^2y, xy^2, 1+x+y]$

   b) $\boldsymbol{F}(x,y) = [\sqrt{x}, \sqrt{y}]$

   c) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = [Ln(x+y),\ Ln(1-z),\ e^{xyz}]$

2. Grafique algunos vectores del campo vectorial dado

   a) $\boldsymbol{F}(x,y) = [x,x]$



Isaac Newton nacido el 25 de diciembre de 1642, en Woolsthorpe, Lincolnshire, Inglaterra, fallecido el 20 de marzo de1727, en Cambridge, Cambridgeshire, Inglaterra. Es el más grande de los astrónomos ingleses; se destacó también como gran físico y matemático. Fue un niño prematuro y su padre murió antes de su nacimiento, a los treinta y siete años. Isaac fue educado por su abuela, preocupada por la delicada salud de su nieto. Desde finales de 1664, Newton parece dispuesto a contribuir personalmente al desarrollo de las matemáticas. Aborda entonces el teorema del binomio, a partir de los trabajos de Wallis, y el cálculo de fluxiones. Fue en realidad un genio al cual debemos el descubrimiento de la ley de gravitación universal, que es una de las piedras angulares de la ciencia moderna. Fue uno de los inventores del cálculo diferencial e integral. Estableció las leyes de la mecánica clásica, y partiendo de la ley de gravitación universal dedujo las leyes de Kepler en forma más general. Logró construir el primer telescopio de reflexión. También son importantes sus contribuciones al estudio de la luz. Sus obras más importantes publicadas son la Optica, en la que explica sus teorías sobre la luz, y la obra monumental Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, comúnmente conocida como Principia, en la cual expone los fundamentos matemáticos del universo.

b) $\boldsymbol{F}(x,y) = [-y, -x]$

c) $\boldsymbol{F}(x,y) = [x^2, y^2]$

3. Para las funciones vectoriales dadas $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{G}$ halle $\boldsymbol{F}\text{o}\boldsymbol{G}$ y $\boldsymbol{G}\text{o}\boldsymbol{F}$

   a) $\boldsymbol{F}(x,y) = [x+y, x-y]$ y $\mathbf{G}(x,y) = [xy, x/y]$

   b) $\boldsymbol{F}(x,y) = [x+y, x-y]$ y $\mathbf{G}(x,y) = [Sen(2x+3y), Cos(2x-3y)]$

   c) $\boldsymbol{F}(x,y) = [x, y, x+y]$ y $\mathbf{G}(x,y,z) = [e^{x+y}, e^{y+z}]$

4. Determine dos ejemplos de campos vectoriales $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{G}$ diferentes tales que $\boldsymbol{F}o\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}o\boldsymbol{F} \neq \boldsymbol{I}$ (campo vectorial identico)

5. Determine dos ejemplos de campos vectoriales $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{G}$ tales que $\boldsymbol{F}o\boldsymbol{G} \neq \boldsymbol{G}o\boldsymbol{F}$

6. Sean $\boldsymbol{F}$ de $D \subset \mathbb{R}^n$en $\mathbb{R}^m$ y $\boldsymbol{G}$ de $V \subset \mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^p$ dos funciones vectoriales

   a) Si $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{G}$ son inyectivas, es $\boldsymbol{GoF}$ inyectiva ?

   b) Si $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{G}$ son sobreyectivas, es $\boldsymbol{GoF}$ sobreyectiva ?

   c) Si $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{G}$ son biyectivas, es $\boldsymbol{GoF}$ biyectiva ?

7. Sea F de $D \subset \mathbb{R}^n$en $\mathbb{R}^m$ un campo vectorial , suponga que $\boldsymbol{G}$ y $\boldsymbol{H}$ de $V \subset \boldsymbol{R}^n$ en $\boldsymbol{R}^p$ dos funciones vectoriales tales que $\boldsymbol{G}o\boldsymbol{F} = \boldsymbol{H}o\boldsymbol{F}$, entonces si $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{H}$. Pruebe que $\boldsymbol{F}$ es sobreyectiva.

8. Si $\boldsymbol{F}$ es un campo vectorial lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, demuestre que $\boldsymbol{F}((x_1,y_1)+k(x_2,y_2)) = \boldsymbol{F}(x_1,y_1) + kF(x_2,y_2)$

9. Una partícula se mueve en el campo de velocidad $V(x,y) = [x^2, x`y^2]$ si su posición en el tiempo $t = 3$ es $(2,1)$, determine su posición en el tiempo $t = 4$

10. Utilizando un CAS grafique varios campos vectoriales.

2.6. Limites y continuidad

Uno de los conceptos de mayor dificultad en funciones de varias variables es el concepto de límite, ya que para saber el comportamiento de una función de varias variables alrededor de un punto $\boldsymbol{a}$ hay que considerar la función definida en cercanias de $\boldsymbol{a}$, o sea en bolas abiertas de centro $\boldsymbol{a}$ y radio δ, y no linealmente como se hace en funciones de una variable, sobre intervalos de la forma $(a-\delta, a+\delta)$. Consideraremos la definición formal de límite para los diferentes tipos de funciones de varias variables.

Gran parte de la terminologia empleada para definir límites y continuidad en funciones de varias variables la introdujo el matemático aleman Karl Weierstrass[6].

El punto a es un punto limite del conjunto D subconjunto de $\mathbb{R}^n$ si y sólo si cualquier bola abierta con centro en a contiene puntos de D diferentes de a.

Ejemplo 2.6.1 *Cualquier conjunto finito de puntos no tiene puntos limite. Cada punto de $\mathbb{R}^n$ es punto límite de $\mathbb{R}^n$. El origen $\mathbf{0}$ de $\mathbb{R}^n$ es punto límite de $\mathbb{R}^n - \mathbf{0}$.*

Si F es una función vectorial de $D \subset R^n$ en R^m y $a \in R^n$ es un punto interior o frontera de D se dice que limite cuando x tiende a a de $F(x)$ es igual a L, escrito
$\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} F(x) = L$ *si y solamente si* $\forall \in > 0$, $\exists\ \delta > 0$ *tal que si* $x \in B(a, \delta) \Rightarrow y \in B(L, \in)$, $(x \neq a)$. *Tambien se puede escribir de la siguiente forma: Si* $||x - a|| < \delta$ *implica que* $\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{L}\| < \in$

Si F es un campo escalar de $D \subset R^n$ en R y $a \in R^n$ es un punto interior o frontera de D se dice que limite cuando x tiende a a de $F(x)$ es igual a L, escrito
$\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} F(x) = L$ *si y solamente si* $\forall \in > 0$, $\exists\ \delta > 0$, *tal que si* $||x - a|| < \delta$ *implica que* $|F(\boldsymbol{x}) - L| < \in$

Ejemplo 2.6.2 *Demuestre que* $\lim\limits_{(x,y) \to (1,2)} 2x + 3y = 8$

Utilizando la definición formal de límite, veamos que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$
tal que $\|(x, y) - (1, 2)\| < \delta$ *implica que* $|2x + 3y - 8| < \epsilon y$
luego $\|(x, y) - (1, 2)\| = \|(x - 1, y - 2)\| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta$
implica que $|x - 1| < \delta$ *y* $|y - 2| < \delta$
veamos ahora que $|2x + 3y - 8| < \epsilon$
$|2x + 3y - 8| = |2x - 4 + 3y - 6| \leq |2x - 4| + |3y - 6| \leq 2|x - 2| + 3|y - 2| < 5\delta$
luego $\epsilon = 5\delta$

6



Karl Weierstrass nació en Ostenfelde, Westfalia (actualmente Alemania) y murió en Berlín (Alemania). Estudió matemáticas en la Universidad de Münster, además de sus prolíficas investigaciones cabe señalar que fue profesor de cátedra en la Universidad de Berlín en la cual tuvo entre sus discípulos a Georg Cantor, Ferdinand Georg Frobenius, Wilhelm Killing, Leo Königsberger, Carl Runge y Sofia Kovalevskaya. Citado como el «padre del análisis moderno», Weierstrass dio las definiciones actuales de continuidad, límite y derivada de una función, que siguen vigentes hoy en día. Esto le permitió demostrar una serie de teoremas que estaban entonces sin demostrar como el Teorema del valor medio, el Teorema de Bolzano-Weierstrass y el Teorema de Heine-Borel. También realizó aportes en convergencia de series, en teoría de funciones periódicas, funciones elípticas, convergencia de productos infinitos, cálculo de variaciones, análisis complejo, etc

Ejemplo 2.6.3 *Demuestre que* $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} x^2+2y=6$

Utilizando la definición formal de límite, veamos que $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta>0$
tal que $\|(x,y)-(2,1)\|<\delta$ *implica que* $|x^2+2y-6|<\epsilon$
luego $\|(x,y)-(2,1)\|=\|(x-2,y-1)\|=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}<\delta$
implica que $|x-2|<\delta$ *y* $|y-1|<\delta$
veamos ahora que $|x^2+2y-6|<\epsilon$
$|x^2+2y-6|=|x^2-4+2y-2|\leq|x^2-4|+|2y-2|\leq|x-2|\,|x+2|+2\,|y-1|$
acotando $|x+2|$ *con* $\delta=1$
luego $-1<x-2<1$ *implica que* $3<x+2<5$
entonces $|x+2|<5$
por lo tanto $|x-2|\,|x+2|+2\,|y-1|<7\delta$, *luego* $\epsilon=7\delta$

Ejemplo 2.6.4 *Demuestre que* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\dfrac{x^2y}{x^2+y^2},\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=(0,0)$

Basta demostrar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$ *y que* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$
por hipotesis $|x|<\delta$ *y* $|y|<\delta$
implica para el primer limite que $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|<\epsilon$
y para el segundo limite que $\left|\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|<\epsilon$
empezando con el primer limite $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=\dfrac{x^2\,|y|}{x^2+y^2}\leq\dfrac{(x^2+y^2)\,|y|}{x^2+y^2}=|y|<\delta$
entonces $\epsilon=\delta$
para el segundo limite $\left|\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}=\delta$
entonces $\epsilon=\delta$

Propiedad 2.6.1 *Si* F *y* G *son campos escalares de* $D\subset\mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$ *es un punto interior o frontera de* U *y ademas* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}F(\mathbf{x})=L$ *y* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}G(\mathbf{x})=M$ *entonces:*

(i) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(kF)(\mathbf{x})=\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}kF(\mathbf{x})=k\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}F(\mathbf{x})=kL$, $\forall k\in\mathbb{R}$
(ii) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(F\pm G)(x)=\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(F(\mathbf{x})\pm G(x))=\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}F(\mathbf{x})\pm\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}G(\mathbf{x})=L\pm M$
(iii) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(F\cdot G)(\mathbf{x})=\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(F(\mathbf{x})\cdot G(x))=L\cdot M$
(iv) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\left(\dfrac{F}{G}\right)(\mathbf{x})=\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\dfrac{F(x)}{G(x)}=\dfrac{L}{M}$ *si* $M\neq0$

Demostración. (ii) Como $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}F(\mathbf{x})=L$ entonces $\forall\epsilon>0$ consideremos $\dfrac{\epsilon}{2}$,
$\exists\delta_1>0$ tal que si $x\in B(a;\delta_1)\Longrightarrow F(x)\in B(L;\dfrac{\epsilon}{2})$ con $x\neq a$

de igual forma $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} G(\mathbf{x}) = M$ entonces $\forall\epsilon > 0$ consideremos $\frac{\epsilon}{2}$,
$\exists\delta_2 > 0$ tal que si $x \in B(a;\delta_2) \Longrightarrow G(x) \in B(L;\frac{\epsilon}{2})$ con $x \neq a$
veamos que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si
$x \in B(a;\delta) \Longrightarrow (F(x) \pm G(x)) \in B(L;\epsilon)$ con $x \neq a$
tomando $0 \leq \delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$
aplicando la desigualdad triangular tenemos
$|(F(x) \pm G(x)) - (L + M)| = |(F(x) - L) \pm (G(x) - M)| \leq |F(x) - L| \pm |G(x) - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$
es decir $(F(x) \pm G(x)) \in B(L \pm M;\epsilon)$ ■

Ejemplo 2.6.5 *Demuestre que* $\lim_{(x,y)\to(1,2)} 2x + 3y = 8$, *utilizando la definición formal de límite.*

si $||(x,y) - (1,2)|| < \delta$, *entonces* $||(x,y) - (1,2)|| = ||\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}|| < \delta$,
luego $|x - 1| < \delta$ *y* $|y - 2| < \delta$, *veamos que* $|F(x,y) - 8| <\in$, $|F(x,y) - 8| = |2x + 3y - 8| \leq 2|x - 1| + 3|y - 2| < 5\delta$,
luego $\delta = \frac{\in}{5}$, *por lo tanto* $||(x,y) - (1,2)|| < \delta$ *implica que* $|F(x,y) - 8| < 5\delta = \in$

El campo escalar del ejemplo anterior es polinomial aparentemente un límite muy facíl, pero por ser de grado uno, en el siguiente ejemplo consideramos un campo escalar polinomial de grado dos.

Ejemplo 2.6.6 *Si* $F(x,y) = x^2 + xy$ *demuestre que* $\lim_{(x,y)\to(2,1)} F(x,y) = 6$, *utilizando la definición formal de límite.*

Si $||(x,y) - (2,1)|| < \delta$, *entonces* $||(x,y) - (2,1)|| = ||\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}|| < \delta$,
luego $|x - 2| < \delta$ *y* $|y - 1| < \delta$, *veamos que* $|F(x,y) - 6| <\in$, $|F(x,y) - 6| = |x^2 + xy - 6| \leq |x^2 - 4| + |xy - 2| < |x - 2||x + 2| + |y||x - 2|$
el incoveniente surge en $|x + 2|$ *y* $|y|$, *luego debemos acotar a* δ,
consideremos a $\delta \leq 1$, *entonces* $|x - 2| < 1$ *y* $|y - 1| < 1$, $-1 < x - 2 < 1$ *y* $-1 < y - 1 < 1$,
a la primera desigualdad le sumamos 4 *y a la segunda desigualdad le sumamos* 1 *y obtenemos* $3 < x + 2 < 5$ *y* $0 < y < 2$,
luego $|x + 2| < 5$ *y* $|y| < 2$ *y* $|F(x,y) - 5| < 5|x - 2||x + 2| + 2|x - 2| < 7\delta$,
luego $\delta = \min(1, \frac{\epsilon}{7})$ *por lo tanto* $||(x,y) - (2,1)|| < \delta$ *implica que* $|F(x,y) - 5| < 7\delta = \epsilon$

Propiedad 2.6.2 *Si* F *es un campo escalar polinomial de* $\mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}$ *y* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, *entonces* $\lim_{\mathbf{x}\to\boldsymbol{a}} F(\mathbf{x}) = F(\boldsymbol{a})$

Tambien a partir de las funciones componentes de una función vectorial $\boldsymbol{F}(\mathbf{x}) = [F_1(x), F_2(x), ..., F_n(x)]$se puede afirmar que el limite de una función vectorial existe si existen los limites de los campos escalares que lo componen o sea $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \boldsymbol{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$ si y solo si $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} F_k(\mathbf{x}) = L_k, \forall k + 1, 2, ..., n$

El siguiente teorema nos permite comprobar que el límite de una función vectorial $\boldsymbol{F}$ existe, si existe el límite de los campos escalares F_k que lo componen.

Teorema 2.6.1 *Suponga que $\boldsymbol{F}(\mathbf{x}) = [F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), ..., F_m(\mathbf{x})]$ es una función vectorial de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ es un punto interior o frontera de D, entonces*
$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \boldsymbol{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$ *si y sólo si* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} F_k(\mathbf{x}) = L_k$*,* $k = 1, 2, , ..., m$

Demostración. Si $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \boldsymbol{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$, utilizando la definición formal de límite,

$\forall \in > 0, \exists\ \delta > 0$ *tal que si* $||\mathbf{x} - \boldsymbol{a}|| < \delta$ *implica que* $\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{L}\| < \in$,
pero $||x - a|| < \delta$ *implica que* $|F_k(\boldsymbol{x}) - L_k| \leq \|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{L}\| < \in$,
para cada $k = 1, 2, ..., m$,
reciprocamente
$\forall \in > 0, \exists\ \delta_k > 0$ *tal que si* $||x - a|| < \delta$ *implica que* $|F(\boldsymbol{x}) - L| < \dfrac{\epsilon}{\sqrt{m}}$,
consideremos $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_m)$
entonces $||x - a|| < \delta$ *implica que* $\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{L}\| = \sqrt{\sum |F_k(\boldsymbol{x}) - L_k|^2} < \sqrt{m * \dfrac{\in}{m}} = \in$

■

Ejemplo 2.6.7 *Si $\boldsymbol{F}(x, y) = [x^2 + xy^3, 3xy, 2x^3 + 5y^2]$ demuestre que* $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,0)} \boldsymbol{F}(x, y) = [1, 0, 2]$,

utilizando el teorema anterior vemos que
$\lim\limits_{(x,y)\to(-1,0)} [x^2 + xy^3, 3xy, 2x^3 + 5y^2] = [\lim\limits_{(x,y)\to(-1,0)} x^2 + xy^3, \lim\limits_{(x,y)\to(-1,0)} 3xy, \lim\limits_{(x,y)\to(-1,0)} 2x^3 + 5y^2] = [1, 0, 2]$,
aplicando la propiedad para campos escalares polinomiales.

Sea F un campo escalar definido en todo $\mathbb{R}^n$ (excepto posiblemente en un subconjunto acotado), se dice que el límite de F cuando $\boldsymbol{x}$ tiende a infinito ($x_i \to \infty, \forall i = 1, 2, ..., n$) es L, si dado $\in > 0$ existe $N > 0$ tal que $\|\boldsymbol{x}\| > N \Rightarrow |F(\boldsymbol{x}) - L| < \in$

Teorema 2.6.2 *Unicidad del límite. Si F es un campo escalar de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ es un punto interior o frontera de D, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = L$ y $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = M$, entonces $L = M$*

Propiedad 2.6.3 *Si F es un campo escalar racional de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$,tal que $F(\boldsymbol{x}) = \dfrac{P(\boldsymbol{x})}{Q(\boldsymbol{x})}$ entonces $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = F(a) = \dfrac{P(\boldsymbol{a})}{Q(\boldsymbol{a})}$, si $Q(\boldsymbol{a}) \neq 0$*

Si F es un campo escalar de $D \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y (a,b) es un punto interior o frontera de D, entonces $\lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{y\to b} F(x,y))$ y $\lim\limits_{y\to b}(\lim\limits_{x\to a} F(x,y))$ se denomian límites iterados de F en (a,b). Si F es un campo escalar de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ y $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ es un punto interior o frontera de D, entonces F posee a lo más $n!$ límites iterados en $\boldsymbol{a}$. Si los límites iterados existen y son iguales, no es condición suficiente para asegurar que el límite existe, pero si son diferentes si es condición suficiente para asegurar que el límite no existe.

Ejemplo 2.6.8 *Hallar los limites iterados de* $F(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ *en el origen*

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}\right) = 0 \text{ y } \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}\right) = 0$$

los limites iterados son iguales por lo tanto no es suficiente para afirmar que el limite en el origen existe.

Ejemplo 2.6.9 *Hallar los limites iterados de* $F(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ *en el origen*

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = 1 \text{ y } \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = -1$$

los limites iterados son diferentes por lo tanto es suficiente para afirmar que el limite no existe en el origen.

Si F es un campo escalar de $U \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, tal que $(x,y) \to (0,0)$ entonces en coordenadas polares $r \to 0^+$ para todo θ. Se debe tener cuidado con el cálculo del limite utilizando coordenadas polares.

Ejemplo 2.6.10 *Utilizando coordenadas polares hallar el limite de* $F(x,y) = \dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2}$ *en el origen*

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{r^5\cos^3\theta sen^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2 sen^2\theta} = \lim_{r\to 0^+}\frac{r^5\cos^3\theta sen^2\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0^+} r^3\cos^3\theta sen^2\theta = 0 \text{ para todo } \theta$$

Ejemplo 2.6.11 *Utilizando coordenadas polares hallar el limite de* $F(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ *en el origen*

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{r^4\cos^2\theta sen^2\theta}{r^4\cos^2\theta sen^2\theta + r^2(\cos^2\theta - sen^2\theta)} = \lim_{r\to 0^+}\frac{r^2\cos^2\theta sen^2\theta}{r^2\cos^2\theta sen^2\theta + (\cos^2\theta - sen^2\theta)}$$

si $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ *el limite es igual a* 1

pero si $\theta = 0$ *el limite es igual a* 0

por lo tanto el limite no existe en el origen

Si F *es un campo escalar de* $D \subset R^n$ *en* R *y* $a \in U$*, se dice que* F *es continuo en* a *si y solamente si* $F(x) = F(a)$

Se dice que F es continuo en D si F es continuo en todos los puntos de D

Si un campo escalar F no es continuo en $\boldsymbol{a} \in D$, se dice que es discontinuo en $\boldsymbol{a}$

Nota: A partir de las funciones componentes de una función vectorial $\boldsymbol{F}$ podemos asegurar que $\boldsymbol{F}$ es continua en $\boldsymbol{a} \in D$ si y solamente si cada una de las funciones F_i que componen a $\boldsymbol{F}$ son continuas en $\boldsymbol{a}$.

Ejemplo 2.6.12 *Determine si es posible redefinir el campo escalar* $F(x,y) = \dfrac{x^2y + xy^2}{x^2+y^2}$ *en el origen para que sea continuo alli.*

Los limites iterados existen y son iguales a cero

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}\right) = 0$ *y* $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}\right) = 0$

supongamos que el limite existe y es igual a cero

utilizando la definición formal de limte

veamos que $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ *tal que*

$\|(x,y)-(0,0)\| = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ *implica que* $|x| < \delta$ *y* $|y| < \delta$

y $\left|\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}\right| < \epsilon$ *implica que* $\left|\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}\right| = \dfrac{x^2|y|+|x|y^2}{x^2+y^2} \le \dfrac{(|x|+|y|)(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \le |x|+|y| < 2\delta$

concluimos que $\epsilon = 2\delta$

entonces el limite existe y es igual a cero

por lo tanto $F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Propiedad 2.6.4 *Todo campo escalar polinomial* F *de* $\mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}$ *, es continuo en todo* $\mathbb{R}^n$

Propiedad 2.6.5 *Todo campo escalar racional* F *de* $D \subset \mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}$ *, es continuo en su dominio* D*, puesto que es el cociente de dos campos escalares continuos.*

Ejemplo 2.6.13 *Determine la continuidad del campo escalar* $F(x,y) = \dfrac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2-1}$

el campo escalar es discontinuo en el circulo unitario $x^2+y^2 = 1$

por lo tanto es continuo en el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \neq 1\}$

Propiedad 2.6.6 *Si* F *y* G *De son campos escalares de* $D \subset \mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}$*, continuos en* $\boldsymbol{a} \in D$*, entonces :*

(i) kF *es continuo en* $\boldsymbol{a}$ $\forall k \in \mathbb{R}$

(ii) $F \pm G$ *es continuo en* $\boldsymbol{a}$

(iii) $F \bullet G$ *es continuo en* $\boldsymbol{a}$

(iv) $\dfrac{F}{G}$ *es continuo en* $\boldsymbol{a}$ *si* $G(\boldsymbol{a}) \neq 0$

Teorema 2.6.3 *Si* F *es un campo escalar de* $D \subset \mathbb{R}^n$ *continuo en* $a \in D$ *y* g *es una función de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$ *continua en* $F(a)$ *entonces el campo escalar* $H(x) = (goF)(x)$ *es continuo en* a

Ejercicios sección 2.6

1. Demuestre los limites dados.

   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)}(x^2+y^2)=2$

   b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\dfrac{x^4-(y-2)^4}{x^2+(y-2)^2}\right)=(0,-4)$

   c) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\dfrac{xy+xz+yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\dfrac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2}\right)=(0,0)$

2. Demuestre que los limites dados no existen

   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

   b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y^2}{x^6+y^4}$

   c) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2}$

3. Encuentre el limite si existe o demuestre que no existe.

   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{(x-1)^{4/3}-(y-1)^{4/3}}{(x-1)^{2/3}+(y-1)^{2/3}}$

   b) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{sen(x+y+z)}{x+y+z}$

   c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2+z^2)Ln(x^2+y^2+z^2)$

4. Utilice coordenadas polares para calcular el limite del campo escalar dado en el origen

   a) $F(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

   b) $F(x,y)=\dfrac{Sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

   c) $F(x,y)=(x^2+y^2)Ln(x^2+y^2)$

5. Determine las condiciones de las constantes a,b,c para que exista el límite dado.

   a) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{xy}{ax^2+by^2+cz^2}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^a y^b}{(x^2+y^2)^c}$

6. Determine la continuidad del campo escalar dado

a) $F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4+3y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $F(x,y) = \begin{cases} x^2+4y^2 & \text{si } x^2+4y^2 \leq 5 \\ 3 & \text{si } x^2+4y^2 > 5 \end{cases}$

7. Determine si es posible redefinir los campos escalares dados en el origen, para que sean continuos alli.

a) $F(x,y) = \dfrac{3x^2y}{x^4+y^4}$

b) $F(x,y) = (1+xy)^{1/xy}$

c) $F(x,y) = \dfrac{SenxSen(3y)}{2xy}$

8. Pruebe que los campos vectoriales dados son continuos en $\mathbb{R}^2$

a) $\boldsymbol{F}(x,y) = [x^2+y^2, x^2-y^2]$

b) $\boldsymbol{F}(x,y) = [Sen(x+y), Cos(x+y)]$

c) $\boldsymbol{F}(x,y) = [e^{x+y}, e^{x-y}]$

9. Utilice el teorema 4.1. para determinar donde el campo escalar H $(H(x,y) = goF(x,y))$ es continuo.

a) $F(x,y) = x^2-y^2\,,\;\; g(t) = \dfrac{t}{t+1}$

b) $F(x,y) = x + Tany\,,\;\; g(t) = t^2+1$

c) $F(x,y) = yLnx\,,\;\; g(t) = e^t$

10. Determine si el campo escalar $F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y^3+1} & \text{si } y \neq -1 \\ 0 & \text{si } y = -1 \end{cases}$ es continuo en $(0,-1)$

11. Utilizando un CAS construya una función que permita calcular límites por trayectorias.

2.7. Derivadas parciales

Sea F un campo escalar de $D \subseteq \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, definido en $(a, b) \in D$, supongamos que hacemos variar solamente a x mientras y permanece constante $(y = b)$ entonces estamos considerando una función de una sola variable x, $\phi(x) = F(x, b)$, si ϕ es derivable en a entonces $\phi'(a)$ determina la derivada parcial de F respecto a x en (a, b) y utilizando la definición de derivada $\phi'(a) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\phi(a+h)-\phi(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(a+h,b)-F(a,b)}{h}$

Notación: $F_x(a, b)$ o $F_1(a, b)$ Lagrange, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(a, b)$ Jacobi, $D_1F(a, b)$ Cauchy[7]

De igual forma supongamos que hacemos variar solamente a y mientras x permanece constante $(x = a)$ entonces estamos considerando una función de una sola variable y, $\varphi(y) = F(a, y)$, si φ es derivable en b entonces $\varphi'(b)$ determina la derivada parcial de F respecto a y en (a, b) y utilizando la definición de derivada $\varphi'(a) = \lim\limits_{k\to 0}\dfrac{\varphi(b+k)-\varphi(b)}{k} = \lim\limits_{k\to 0}\dfrac{F(a,b+k)-F(a,b)}{k}$

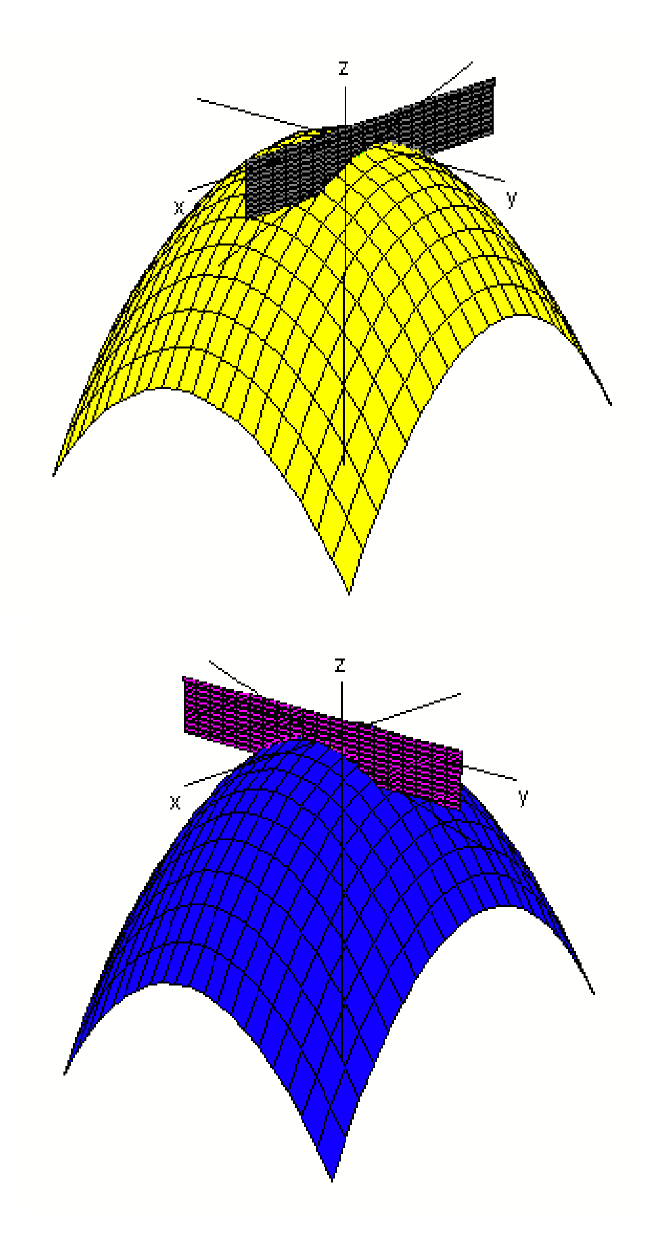
Notación: $F_y(a, b)$ o $F_2(a, b)$ Lagrange, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a, b)$ Jacobi, $D_2F(a, b)$ Cauchy.

Para dar una interpretación geométrica de las derivadas parciales, recordemos que todo campo escalar $z = F(x, y)$ representa geometricamente una superficie S. Si $F(a, b) = c$, entonces el punto $P(a, b, c)$ se encuentra en S. Al variar x y permanecer y constante $(y = b)$ estamos considerando la curva intersección C_1 (traza) entre la superficie S y el plano vertical $y = b$, la curva C_1 es la gráfica de la función $\phi(x) = F(x, b)$ de modo que la recta tangente a C_1 en P tiene como pendiente a $\phi'(a)$. De igual forma al variar y y permanecer x constante $(x = a)$ estamos considerando la curva intersección C_2 (traza) entre la superficie S y el plano vertical $x = a$, la curva C_2 es la gráfica de la función $\varphi(y) = F8a, y)$ de modo que la recta tangente a C_2 en P tiene como pendiente a $\varphi'(b)$.

7



Augustin Louis Cauchy (n. París 1789 - † Scenaux 1857) Matemático y físico frances, mayor de los seis hijos de un abogado católico y realista,que hubo que retirarse a Arcueil cuando estalló la Revolución. Fue educado en casa por su padre y no ingresó en la escuela hasta los trece años,aunque pronto empezó a ganar premios académicos. A los dieciséis años ingresa en la École Polytechnique parisina y a los dieciocho asistía a una escuela de ingeniería civil, donde se graduó tres años después. Su primer trabajo fue como ingeniero militar para Napoleón, ayudando a construir las defensas en Cherburgo. En 1813 retorna a París y es persuadido por Laplace y Lagrange para convertirse en un devoto de las matemáticas. Publicó un total de 789 trabajos, entre los que se encuentran el concepto de límite, los criterios de convergencia las fórmulas y los teoremas de integración y las ecuaciones diferenciales de Cauchy-Riemann. Su extensa obra introdujo y consolidó el concepto fundamental de rigor matemático.



De manera general si F es un campo escalar de $D \subseteq \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ definido en $a \in D$, supongamos que hacemos variar solamente a x_k mientras las otras variables x_i $(x_i = a_i)$ permanecen constantes, entonces estamos considerando una función $\phi(x_k) = F(a_1, a_2, ..., x_k, ..., a_n)$ de una sola variable, si ϕ es derivable en a entonces $\phi'(a)$ (determina la derivada parcial de F respecto a x_k en a y utilizando la definición de derivada $\phi'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\phi(a_k + h) - \phi(a_k)}{h} =$ $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(a_1, a_2, ..., x_k + h, ..., a_n) - F(a_1, a_2, ..., a_k, ..., a_n)}{h}$

Notación: $F_{x_k}(a)$ o $F_k(a)$ Lagrange, $\dfrac{\partial F}{\partial x_k}(a)$ Jacobi, $D_k F(a)$ Cauchy.Lagrange Jacobi Cauchy;

Nota : A partir de las funciones componentes F_i de una función vectorial $\mathbf{F}$ podemos

asegurar que $\dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_k}(a) = \left[\dfrac{\partial F_1}{\partial x_k}(a), \dfrac{\partial F_2}{\partial x_k}(a), ..., \dfrac{\partial F_n}{\partial x_k}(a)\right]$

Ejemplo 2.7.1 *Hallar las primeras derivadas parciales de* $F(x,y) = xcosy + ysenx$

Primero fijamos y, *y derivamos respecto a* x *para obtener*

$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \cos y + y \cos sx$

De igual forma fijamos x, *y derivamos respecto a* y *para obtener*

$\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -xseny + senx$

Ejemplo 2.7.2 *Hallar las primeras derivadas parciales de* $F(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ *en* $(0,0)$

Aqui debemos utilizar la definición de derivada para hallar las derivadas parciales.

$\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(h,0) - F(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0-0}{h} = 0$

$y \ \dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(0,h) - F(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0-0}{h} = 0$

Propiedad 2.7.1 *Si* F *y* G *son campos escalares de* $D \subset \mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}$ *que poseen primeras derivadas parciales en* $\boldsymbol{a}$, *entonces*

$\dfrac{\partial (F \pm G)}{\partial x_k}(a) = \dfrac{\partial F}{\partial x_k}(a) \pm \dfrac{\partial G}{\partial x_k}(a)$

$\dfrac{\partial (kF)}{\partial x_k}(a) = k\dfrac{\partial F}{\partial x_k}(a)$

$\dfrac{\partial (F \cdot G)}{\partial x_k}(a) = \dfrac{\partial F}{\partial x_k}(a) \cdot G(a) + F(a) \cdot \dfrac{\partial G}{\partial x_k}(a)$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{F}{G}\right)(a) = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_k}(a) \cdot G(a) - F(a) \cdot \dfrac{\partial G}{\partial x_k}(a)}{G^2(a)}$$

Si F es un campo escalar de $U \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, que posee primeras derivadas parciales continuas en $\boldsymbol{a} \in U$ y cada una de estas derivadas tambien poseen primeras derivadas parciales continuas en $\boldsymbol{a}$, entonces F posee segundas derivadas parciales continuas en $\boldsymbol{a}$.

Notación : $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a}) = F_{x_j x_i}(\boldsymbol{a}) = D_{ji}F(\boldsymbol{a})$. Se puede seguir de manera inductiva hasta un orden m $(m \in \mathbb{N})$

Ejemplo 2.7.3 *Hallar las segundas derivadas parciales de* $F(x,y) = sen(x+y) + \cos(x-y)$

Las primeras derivadas parciales son

$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = Cos(x+y) - Sen(x-y)$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Cos(x+y) + Sen(x-y)$

Las derivadas parciales de segundo orden son

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = -Sen(x+y) - Cos(x-y)$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = -Sen(x+y) + Cos(x-y)$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = -Sen(x+y) + Cos(x-y)$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = -Sen(x+y) - Cos(x-y)$$

Ejercicios sección 2.7

1. Utilizando la definición halle las primeras derivadas parciales del campo escalar F

   a) $F(x,y) = xy^2 + x^2y$

   b) $F(x,y) = x + \dfrac{x}{x+y}$

   c) $F(x,y) = \sqrt{x+y}$

2. Halle las primeras derivadas parciales del campo escalar F.

   a) $F(x,y) = x^y$

   b) $F(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x+y+z}$

   c) $F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

3. Hallar las primeras derivadas parciales del campo escalar F.en el punto dado

   a) $F(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$, $p = (1,2)$

   b) $F(x,y) = x\cos y + ysenx$, $p = (0, \pi/4)$

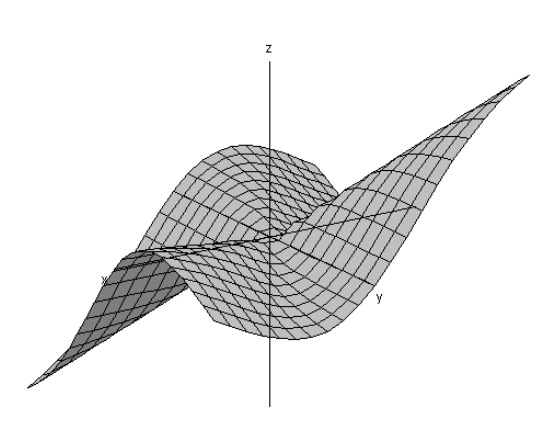
   c) $F(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}$, $p = (1,1)$

4. Halle las primeras derivadas parciales del campo escalar F. Si g es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, diferenciable.

   a) $F(x,y) = \int_{x+y}^{x-y} g(t)dt$

   b) $F(x,y) = \int_{xy}^{x/y} g(t)dt$

   c) $F(x,y) = \int_{x^y}^{y^x} g(t)dt$



5. A partir de la gráfica del campo escalar F determine el signo de

   a) $F_x(1,1)$
   b) $F_y(1,1)$
   c) $F_{xy}(1,1)$

6. A partir de la tabla de valores de un campo escalar F

$x\backslash y$	1	2	3
0	7,5	5,2	3,8
2	16,1	14,3	12,3
4	21,9	18,4	15,7

   estime

   a) $F_x(2,2)$
   b) $F_y(0,1)$
   c) $F_{xy}(2,2)$

7. Hallar las derivadas parciales de la función vectorial dada.

   a) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (xy + yz + zx, xyz)$
   b) $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(\sqrt{2x+3y}, x\sqrt{y} - \frac{y}{\sqrt{x}}, \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$
   c) $F(x,y,z) = (sen(2x+3y), \cos(3y+4z), \tan(4x+5z))$

8. Halle las segundas derivadas parciales del campo escalar F.

   a) $F(x,y) = ArcTan\left(\frac{y}{x}\right)$
   b) $F(x,y) = e^x Cosy + e^y Cosx$
   c) $F(x,y) = xSeny + yCosx$

9. Compruebe que el campo escalar F satisface la ecuación de Laplace. $F_{xx} + F_{yy} = 0$

a) $F(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$

b) $F(x,y) = Ln\sqrt{x^2+y^2}$

c) $F(x,y) = ArcTan\frac{y}{x}$

10. En un estudio realizado sobre el sistema de créditos académicos, la nota aproximada en un parcial de cálculo vectorial, en función de y el número de horas asistidas a clase y de x el número de horas dedicadas a estudiar, viene dada por $N(x,y) = 200\left(\dfrac{y}{80-0{,}2x}\right)^5$, para $0 \leq y \leq 32$ y $0 \leq x \leq 64$ (cuatro semanas). Calcular $\dfrac{\partial N}{\partial x}$y $\dfrac{\partial N}{\partial y}$ y determinar cual de las variables x o y, tiene mayor efecto sobre la nota.

11. Utilizando un CAS represente geometricamente las derivadas parciales de un campo escalar.

2.8. Derivadas direccionales

En funciones de una variable hablar de la derivada de una función f en un punto a significa hablar de la variación instantanea de f en a, pero en funciones de varias variables para estudiar estos cambios en un punto $a \in D$ hay que fijar una dirección v en $\mathbb{R}^n$ y no se hablara simplemente de la derivada de F en a sino de la derivada de F en a en la dirección del vector v.

Si F es un campo escalar de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, $a \in D$ y v es un vector de $\mathbb{R}^n$ no nulo, entonces al limite $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{F(a+tv)-F(a)}{t\,\|v\|}$ si existe se denominara derivada respecto al vector v de F en a.Si el vector v es unitario, entonces al limite $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{F(a+tv)-F(a)}{t}$ si existe, se denominara derivada direccional de F en a con respecto a v

Notación: $F'(a;v), F_v(a)$ Lagrange, $\dfrac{\partial F}{\partial v}(a)$ Jacobi, $D_vF(a)$ Cauchy.

A partir de las funciones componentes de $\boldsymbol{F}$ podemos asegurar que $\dfrac{\partial F}{\partial v}(a) = \left(\dfrac{\partial F_k}{\partial v}(a)\right)$

Ejemplo 2.8.1 *Hallar la derivada direccional de* $F(x,y) = 2x+3y$ *en el punto* $(-1,1)$ *en dirección* $[3,4]$

como el vector no es unitario lo normalizamos y $v = \left[\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right]$

luego $F'((-1,1); \left[\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right])$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{F((-1,1)+t\left[\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right]) - F(-1,1)}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{F((-1+\frac{3}{5}t, 1+\frac{4}{5}t) - F(-1,1)}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{2(-1+\frac{3}{5}t) + 3(1+\frac{4}{5}t) + 2 - 3}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{-2+\frac{6}{5}t + 3 + \frac{12}{5}t + 2 - 3}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{18}{5}t}{t} = \frac{18}{5}$$

Sean F es un campo escalar de $D \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y $(a,b) \in D$, suponga que $\boldsymbol{v}$ es el vector unitario que forma un ángulo θ con el eje X positivo y $\boldsymbol{v} = [Cos\theta, Sen\theta]$, entonces si existe el limite $\lim_{t\to 0} \frac{F((a,b)+t(cos\theta, sen\theta)) - F(a,b)}{t}$ se denomina derivada direccional de F en (a,b) en dirección θ

Ejemplo 2.8.2 *Hallar la derivada direccional de $F(x,y) = 2x^2 + 3y^2$ en cualquier punto, en la dirección indicada por el ángulo θ*

$\boldsymbol{v} = [cos\theta, sen\theta]$

luego $\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{v}}(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{F((a,b)+t(Cos\theta, Sen\theta)) - F(a,b)}{t}$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{F(a+tcos\theta, b+tsen\theta) - F(a,b)}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{2(a+tcos\theta)^2 + 3(b+tsen\theta)^2 - 2a^2 - 2b^2}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{2a^2 + 4at\cos\theta + 2t^2\cos^2\theta + 3b^2 + 6btsen\theta + 3t^2sen^2\theta - 2a^2 - 2b^2}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{4at\cos\theta + 2t^2\cos^2\theta + 6btsen\theta + 3t^2sen^2\theta}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} 4a\cos\theta + 2t\cos^2\theta + 6bsen\theta + 3tsen^2\theta$$
$$= 4a\cos\theta + 6bsen\theta$$

Teorema 2.8.1 *Si F es es un campo escalar de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ y ϕ es una función de $I \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tal que $\phi(t) = F(a+tv)$ para $a \in D$ y v un vector unitario de $\mathbb{R}^n$, entonces $\phi'(t)$ existe si y solo si $F'(a+tv : v)$ existe y ademas $\phi'(t) = F'(a+tv; v)$ (En particular $\phi'(0) = F'(a; v)$*

Demostración. Como ϕ es una función de variable real y valor real, entonces

$$\phi'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h}$$

ademas $\phi(t) = F(a + tv$
luego $\phi'(t) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(a + (t + h)v) - F(a + tv)}{h}$
$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(a + tv + hv) - F(a + tv)}{h}$
$= F'(a + tv; v)$
si $t = 0$, $\phi'(t) = F'(a; v)$ ■

Un campo escalar F de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, es derivable en $a \in D$ si existe la derivada direccional $F'(a; v)$ para todo vector v de $\mathbb{R}^n$

Ejemplo 2.8.3 *Hallar la derivada direccional de* $F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & si\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si\ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ *en el origen, en cualquier dirección.*

Sea $v = [v_1, v_2]$ un vector unitario cualquiera, aplicando el teorema
$\phi(t) = F((0, 0) + t(v_1, v_2)) = F(tv_1, tv_2) = \dfrac{t^3 v_1 v_2^2}{t^2 v_1^2 + t^4 v_2^4} = \dfrac{tv_1 v_2^2}{v_1^2 + t^2 v_2^4}$
entonces $F'((0, 0); \boldsymbol{v}) = \dfrac{v_2^2}{v_1}$ *para todo $\boldsymbol{v}$ por lo tanto F es derivable en el origen.*

Se puede verificar como ejercicio que el campo escalar F no es continuo en el origen, lo cual nos permite asegurar que en varias variables para que una función sea derivable no necesariamente debe ser continua.

Teorema 2.8.2 *Teorema del valor medio para campos escalares. Sean $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ elementos de D, tal que , $[a, b] \subset D$ y $\boldsymbol{v}$ es un vector unitario de $\mathbb{R}^n$ en dirección $b - a$, si F es continuo en $[a, b]$ y tiene derivadas direccionales en (a, b) en dirección $\boldsymbol{v}$, entonces existe θ $(0 < \theta < 1)$ tal que $F(a + h\boldsymbol{v}) - F(a) = F'(a + \theta h\boldsymbol{v}; \boldsymbol{v})h$, donde $h = \|[a, b]\|$. Nota : $[a, b]$ es el segmento de recta que une a $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$*

Demostración. Sea ϕ una función de $[0, h]$ en $\mathbb{R}$ tal que $\phi(t) = F(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v})$
Vemos que ϕ es continua en $[0, h]$ ya que F lo es en $[a, b]$
Ademas $\phi(t) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\phi(t + h) - \phi(t)}{h}$
$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(a + (t + h)v) - F(a + tv)}{h}$
$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(a + tv + hv) - F(a + tv)}{h}$
$= \dfrac{\partial F}{\partial v}(a + tv)$
de modo que para $t \in (0, 1)$ $\phi'(t)$ existe y es igual a la derivada direccional de F en $\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v} \in (a, b)$
en dirección $\boldsymbol{v}$, aplicando el teorema del valor medio a la función ϕ

existe $\theta \in (0,1)$ tal que $\phi'(\theta h) = \dfrac{\phi(h) - \phi(0)}{h}$
o sea $F(a+h\boldsymbol{v}) - F(a) = F'(a+\theta h\boldsymbol{v}; \boldsymbol{v})h$ ■

Propiedad 2.8.1 *Si F y G son campos escalares de $U \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ tales que $\dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{v}}(a)$ y $\dfrac{\partial G}{\partial \boldsymbol{v}}(a)$ existen en dirección de un vector unitario $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^n$ entonces*

(i) $\dfrac{\partial(F \pm G)}{\partial \boldsymbol{v}}(a) = \dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{v}}(a) \pm \dfrac{\partial G}{\partial \boldsymbol{v}}(a)$

(ii) $\dfrac{\partial(kF)}{\partial \boldsymbol{v}}(a) = k\dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{v}}(a)\ k \in \mathbb{R}$

(iii) $\dfrac{\partial(F \cdot G)}{\partial \boldsymbol{v}}(a) = \dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{v}}(a) \cdot G(a) + F(a) \cdot \dfrac{\partial G}{\partial \boldsymbol{v}}(a)$

(iv) $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}\left(\dfrac{F}{G}\right) = \dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{v}}(a) \cdot G(a) + F(a) \cdot \dfrac{\partial G}{\partial \boldsymbol{v}}(a)}{\mathcal{G}^2(a)}$

Demostración. (i) Por definición

$$\frac{\partial(F \pm G)}{\partial \boldsymbol{v}}(a) = \lim_{t \to 0}\frac{(F \pm G)(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v}) - (F \pm G)(\boldsymbol{x}_0)}{t}$$
$$= \lim_{t \to 0}\frac{F(a+t\boldsymbol{v}) \pm G(a+tv) - F(a) \mp G(a)}{t}$$
$$= \lim_{t \to 0}\frac{F(a+t\boldsymbol{v}) - F(a)}{t} \pm = \lim_{h \to 0}\frac{G(a+tv) - G(a)}{t}$$
$$= \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{v}}(a) \pm \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{v}}(a) \quad ■$$

Si F es un campo escalar de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ y $\boldsymbol{a} \in D$ y $\boldsymbol{e}_i$ es un vector de la base canonica de $\mathbb{R}^n$ entonces al limite $\lim\limits_{t \to 0}\dfrac{F(a+te_i) - F(a)}{t}$ si existe, se denominara derivada parcial de F en $\boldsymbol{a}$ con respecto a la variable x_i.

Notación: $F'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{e}_i)$, $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(a)$ de Jacobi, $F_i(a), D_iF(a)$ de Cauchy, $F_{x_i}(\boldsymbol{x}_0)$.

A partir de las funciones componentes de $\boldsymbol{F}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x_i}(a) = \left(\dfrac{\partial F_k}{\partial x_i}(a)\right)\ \forall k = 1, 2, ..., m$

Leonhard Euler y Jean Le Ron D'Alembert[8] publicarón varios articulos sobre la teoría de las derivadas parciales

Ejercicios sección 2.8

1. Utilizando la definición hallar la derivada direccional del campo escalar F en el punto p, en dirección $\boldsymbol{v}$

   a) $F(x,y) = 2x + 3y$, $p = (1,1)$, $\boldsymbol{v} = [1,-1]$

   b) $F(x,y) = x^2 + xy$, $p = (1,0)$, $\boldsymbol{v} = [3,4]$

   c) $F(x,y,z) = xy + yz + xz$, $p = (0,1,-1)$, $\boldsymbol{v} = [1,2,2,]$

2. Hallar la derivada direccional del campo escalar F en el punto p, en dirección $\boldsymbol{v}$.

   a) $F(x,y) = (2x+3y)^3$, $p = (1,1)$, $\boldsymbol{v} = [-1,1]$

   b) $F(x,y) = sen(xy)$, $p = (\pi/41, \pi/4)$, $\boldsymbol{v} = [4,3]$

   c) $F(x,y) = \sqrt{xyz}$, $p = (1,0,1)$, $\boldsymbol{v} = [2,-2,1]$

3. Encuentre la derivada direccional del campo escalar F en el punto p, en dirección al punto q

   a) $F(x,y) = 2x - 7y + 1$, $p = (0,0)$, $q = (1,1)$

   b) $F(x,y) = x^2 - 2xy + 5y^2$, $p = (-1,2)$. $q = (3,5)$

   c) $F(x,y,z) = xy + xz + yz$, $p(0,1,2)$, $q = (3,-1,4)$

8



Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), matemático, filósofo y enciclopedista francés. Nació en París y era hijo natural de la escritora francesa Claudine Guérin de Tencin; y fue abandonado de niño en las escaleras de la iglesia de Saint Jean le Rond, de donde proviene su nombre. Estudió en la escuela Mazarin, donde se distinguió en matemáticas, física y astronomía. A la edad de 22 años escribió su primer libro: Memoria sobre el cálculo integral (1739). Su trabajo científico más importante, Tratado de dinámica (1743), marca una época en la ciencia de la mecánica, ya que enuncia la teoría conocida como el principio de D'Alembert, que descubrió a los 26 años que dice lo siguiente: el resultado de las fuerzas ejercidas sobre un sistema es equivalente a la fuerza efectiva sobre todo el sistema. S[illegible] refle[illegible] causa general de los vientos (1746) contiene el primer concepto del cálculo d[illegible]ones [illegible] parciales. En 1749 propuso la primera solución analítica de la precesión de los equinoccios. En 1751 se asoció con el enciclopedista francés Denis Diderot para editar la gran Enciclopedia francesa. Aunque abandonó la redacción en 1758 debido a las presiones gubernamentales sobre la publicación, D'Alembert continuó trabajando en artículos de ciencia y filosofía.

4. Halle la derivada direccional del campo escalar F, en el punto p, en la dirección indicada por θ

   a) $F(x,y) = x^2y^3 + 2x^4y\,, \quad p = (1,2)\ \ y\ \theta = \pi/3$
   b) $F(x,y) = (x^2 - y)^3\,,\ p = (3,1)\ \ y\ \ \theta = 3\pi/4$
   c) $F(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\ \ p = (0,0)\ \ y\ \ \theta = \pi/4$

5. Hallar la derivada direccional de la función vectorial dada en el punto p, en dirección $\boldsymbol{v}$.

   a) $\boldsymbol{F}(x,y) = (x^2y^3, 2x^4y)\ \ p = (1,-2)\ \ \boldsymbol{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$
   b) $\boldsymbol{F}(x,y) = (e^x Seny, e^x Cosy)\ p = (1, \frac{\pi}{4})\quad \boldsymbol{v} = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$
   c) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z}, \sqrt{xyz}\right)\ p = (4,2,1) \qquad \boldsymbol{v} = (1,1,-1)$

6. Determine si el campo escalar F es derivable en el origen

   a) $F(x,y) = \sqrt{xy}$
   b) $F(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } x = 0 \text{ o } y = 0 \\ 1 & \text{en otra parte} \end{cases}$
   c) $F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{12xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$

7. Encuentre (si existe) un campo escalar F tal que $F'(a;\boldsymbol{v}) > 0$

   a) Para a fijo y $\boldsymbol{v}$ cualquiera.
   b) Para a cualquiera y $\boldsymbol{v}$ fijo.

8. Utilizando un CAS represente geometricamente las derivadas direccionales de un campo escalar.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPITULO 2

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso, justificando su respuesta.

1. Si $\boldsymbol{f}$ es una función real-vectorial definida en a entonces $\boldsymbol{f}'(a)$ es tangente a la gráfica de $\boldsymbol{f}$ en a.

2. Una curva C es suave si esta determinada por una función de variable real y valor vectorial f derivable en todo su dominio.

3. Si f es diferenciable, $\|f\|$ es diferenciable.

4. La integral de una función $\boldsymbol{f}$ real-vectorial es un vector.

5. Las funciones coordenadas de un campo escalar son funciones de variable real y valor real.

6. No es posible componer dos campos escalares.

7. La gráfica de una función vectorial $\boldsymbol{F}$ de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ es un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^5$

8. Si el límite de un campo escalar F existe en el origen utilizando coordenadas polares, entonces el límite de F existe en el origen.

9. Si un campo escalar F posee derivadas parciales en un punto a entonces F es continuo en a.

10. Si un campo escalar F posee derivada direccional en un punto a en todas las direcciones, entonces F es derivable en a.

PREGUNTAS DE SELECCIÓN MULTIPLE CON UNICA RESPUESTA

1. Sea F una función de valor vectorial que representa la curva intersección entre las superficies $z = xy$ y $x^2 + y^2 = 4$, entonces es correcto afirmar que:

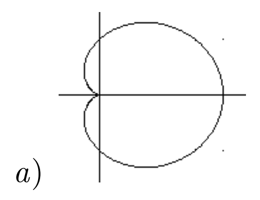
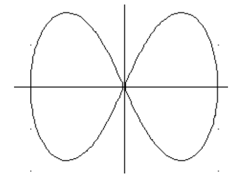
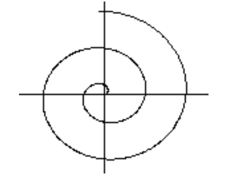
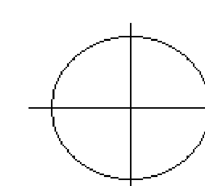
   A. $F(t) = \left[t, \sqrt{4-t^2}, t\sqrt{4-t^2}\right]$ B. $F(t) = \left[t, \pm\sqrt{4-t^2}, \pm t\sqrt{4-t^2}\right]$ C. $F(t) = [\cos t, sent, \cos t sent]$ D. $F(t) = [2\cos t, 2sent, 2sen(2t)]$

2. La gráfica de la función vectorial $F(t) = [e^{-t}\cos t, e^{-t}sent, e^{-t}]$ se encuentra en:

   A. Una esfera B. Un cono C. Un paraboloide D. En un hiperboloide

3. Para el campo escalar $F(r, \theta) = \dfrac{Cos(2\theta)}{r^2}$ es correcto afirmar que sus curvas de nivel son:

   $a)$

   A. Cardiodes B. Lemniscatas C. Espirales E. Círculos

4. El campo escalar $F(x, y) = x + y$ es inyectivo en el siguiente dominio.

A. $\mathbb{R}^2$ B. $x^2+y^2 \leq 1$ C. $y=x$ D. $y \leq x$

5. El valor de k para el cual el campo escalar $F(x,y)=\begin{cases}(x+y)sen\dfrac{1}{x}sen\frac{1}{y} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ k & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ es continuo en $(0,0)$, es:

   A. 0 B. 1 C. ∞ D.Ninguno

6. Para que el campo escalar $F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ k & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ sea continuo en $(0,0)$, es correcto afirmar que:

   A. $k=0$ B. $k=1$ C. $k=2$ D. No existe ningun k

7. Para el campo escalar $F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{y} & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{si } y=0\end{cases}$ se puede afirmar que en $(0,1)$

   A. El límite a lo largo de $y=x$ es igual a 1 B. El límite a lo largo de $y=x+1$ es igual a 0.

   C. El límite en coordenadas polares es igual a $\cot\theta$ D. El límite a lo largo de $x=(y-1)^2$ es igual a -2

8. Para el campo escalar $F(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ es correcto afirmar que en el origen $(0,0)$:

   A. es derivable B. $F_x=F_y$ C. F_x es continua D.F_y es continua

9. La derivada direccional de $F(x,y)=2x^2+3y^2$ en el punto (a,b) en dirección dada por un ángulo θ (formado con el eje x) es:

   A. $4a\theta$ B. $6b\theta$ C.$4a\theta+6b\theta$ D.$4a\cos\theta+6b\cos\theta$

10. La derivada direccional de $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2$ en el punto $P(1,-1,0)$ en dirección al punto $Q(2,1,2)$ es igual a:

    A. 0 B. 2 C. -2 D. 6

PREGUNTAS DE SELECCIÓN MULTIPLE CON MULTIPLE RESPUESTA

Si 1 y 2 son correctas marque A Si 2 y 3 son correctas marque B
Si 3 y 4 son correctas marque C Si 2 y 4 son correctas marque D
Si 1 y 3 son correctas marque E

1. Para una función real-vectorial f constante se puede afirmar que

   1. Dominio es $\mathbb{R}$ 2 Rango es $\mathbb{R}^m$ 3. Su gráfica es un punto 4. Es inyectiva.
   A. B. C. D. E.

2. Si la trayectoria de un objeto que se mueve en el espacio está determinada por $f(t) = (4t, 3\cos t, 3sent)$, es correcto afirmar que:

   1. $d(t) = (2t^2, 3sent, -3sent)$ es su posición. 2. $v(t) = (4, -3sent, 3\cos t)$ es su velocidad
   3. $a(t) = (4, 3\cos t, 3\cos t)$ es su aceleración 4. $k = 5$ es su rápidez
   A. B. C. D. E.

3. Para el campo escalar $F(x, y) = x^y$ se puede afirmar que:

   1. $F(x, y) = F(y, x)$ 2. $F(-x, -y) = -F(x, y)$ 3. $F(x, -y) = \dfrac{1}{F(x, y)}$ 4. $F(-x, y) = -F(x, y)$
   A. B. C. D. E.

4. Si $F(x, y) = Ln(xy)$ entonces es correcto afirmar que:

   1. Las curvas de nivel de F son hipérbolas. 2. La gráfica de F es una superficie de revolución
   3. Dominio de F es $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy > 0\}$ 4. Rango de F es $E = \{z \in \mathbb{R} | z > 0\}$.
   A. B. C. D. E.

5. Si $F(xy, x/y) = x^2 - y^2$ es correcto afirmar que:

   1. $F(0, 0) = 0$ 2. $F(1, 1) = 0$ 3. $F(1, -1) = 2$ 4. $F(2, 1) = 3$
   A. B. C. D. E.

6. Para el campo escalar $F(x, y) = (x + y)sen\dfrac{1}{x}sen\dfrac{1}{y}$ es correcto afirmar que en el punto $(0, 0)$

   1. El límite no existe 2. Los límites iterados no existen
   3. El límite es igual a infinito 4. El límite existe
   A. B. C. D. E.

7. Para el campo escalar $F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x^3 + 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$ es correcto afirmar que en el punto $(1, 0)$

1. F No tiene límite 2. Existen las derivadas parciales de F
3. Existe la derivada direccional de F en todas las direcciones 4. F es continuo
A. B. C. D. E.

8. Para el campo vectorial $F(x,y) = [e^x, \ln y]$ se puede afirmar que:

1. Dominio es $\mathbb{R}^2$ 2. Rango es $\mathbb{R}^2$ 3. es inyectivo 4. $F(0,e) = [1,1]$
A. B. C. D. E.

9. Si $F(x,y) = \int_x^y \sqrt{1+t^3}dt$ es correcto afirmar que:

1. $F_{xy} = F_{yx}$ 2. $F_{xx}+F_{yy} = 0$ 3. $F_{xx} = -\dfrac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$ 4. $F_{yy} = -\dfrac{3y^2}{2\sqrt{1+y^3}}$
A. B. C. D. E.

10. Si F es un campo escalar de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, entonces su derivada direccional puede estar determinada por:

1. Un número real 2. Un vector de $\mathbb{R}^2$ 3. Una superficie 4. Una recta tangente.
A. B. C. D. E.

PREGUNTAS ABIERTAS

1. Hallar el punto de corte de $\boldsymbol{f}(t) = \left[e^t, 2sen\left(t + \frac{1}{2}\pi\right), t^2 - 2\right]$ y $\boldsymbol{g}(t) = [u, 2, u^2 - 3]$, y el àngulo de intersección.

2. Para la función $\boldsymbol{f}$ real-vectorial de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$, calcular $\boldsymbol{f}'$ y $\boldsymbol{f}''$

   a) $f(t) = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$
   b) $f(t) = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} + t^2\boldsymbol{c}$

3. Hallar una función real-vectorial $\boldsymbol{f}$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$ que satisfaga las siguientes condiciones: $\boldsymbol{f}''(t) = \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{f}'(0) = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{f}(0) = \boldsymbol{a}$ para todo t real

4. Para el campo escalar dado determine dominio, rango y gráfica.

   a) $F(x,y) = xy$
   b) $F(x,y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}$
   c) $F(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

5. Sean x, y positivas y sea T el triángulo de vértices $(0,y)$, $(x,0)$, $(-x,0)$. Se representa con $F(x,y)$ el perímetro de dicho triángulo.

a) Graficar el triángulo T

b) Hallar una fórmula para $F(x, y)$

c) Graficar la curva de nivel para $F(x, y) = 2$

6. Determine si es posible redefinir el campo escalar dado en el origen para que sea continuo alli.

a) $F(x, y) = (x^2 + y^2)Ln(x^2 + y^2)$

b) $F(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$

c) $F(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{\left|\dfrac{x+y}{x-y}\right|}}$

7. Para el campo escalar determine dominio, rango e identifique las superficies de nivel

a) $F(x, y, z) = \dfrac{z}{x^2 + y^2}$

b) $F(x, y, z) = \dfrac{z^2 - 1}{x^2 + y^2}$

c) $F(x, y, z) = \dfrac{z^2 + 1}{x^2 + y^2}$

8. Demostrar que si un objeto se mueve con rapidez constante, sus vectores velocidad y aceleración son ortogonales.

9. Demuestre que si $\lim\limits_{x \to a} F(x) = L$, para $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, entonces

a) $\lim\limits_{x \to a} (F(x))^2 = L^2$

b) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{|F(x, y)|} = \sqrt{|L|}$

10. Para que valor(es) de n, el límite dado existe

a) $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x^n}{x^2 + y^2}$

b) $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x^n + y^n}{xy}$

11. Determine si los campos escalares dados son derivables en el origen.

a) $F(x, y) = \sqrt[3]{xy}$

b) $F(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } x=0 \text{ o } y=0 \\ 1 & \text{en otra parte} \end{cases}$

c) $F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

12. Hallar la derivada direccional de $F(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ en (a,b) en dirección al punto (b,a) si

a) $a > b$

b) $b > a$

PROBLEMAS

1. Un balón de voleibol es golpeado cuando está a 4 pies sobre el suelo y a 12 pies de una red que tiene 6 pies de altura. Deja el punto de impacto con una rapidez inicial de 35 pies/s y un ángulo de 270° , sin ser tocado por el equipo contrario.

a) ¿Cual es la máxima altura alcanzada por el balón?

b) ¿A que distancia (horizontal) se encuentra el balón del punto donde tocara el suelo?

c) ¿En que momento se encuentra el balón a la altura de la red?

Sugerencia: Utilice la ecuación vectorial para el lanzamiento de un proyectil ideal desde el punto (x_0, y_0), $R = \left[x_0 + (v_0 \cos\alpha)t, (y_0 sen\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right]$ y $g = 32$

2. La trayectoria que sigue un balón de futbol cuando el portero saca de meta está determinada por $F(t) = [(25\cos\frac{\pi}{9})t, (25sen\frac{\pi}{9})t - 2{,}5t^2]$, donde t está dada en segundos y la trayectoria en metros.

a) ¿Cuándo tocará el balón el piso?

b) ¿En que instante el balón alcanzará la máxima altura?

c) ¿Que rápidez lleva el balón a los 3 segundos?

3. En los juegos olimpicos de Beiging el sloveno Primoz Kozmus lanzo un martillo de 7,2 Kg. con un ángulo de 45^0 con respecto a el suelo, alcanzando una distancia de 82,02 m y obtuvo la medalla de oro, determine:

a) Velocidad inicial del lanzamiento.

b) Máxima altura alcanzada por el martillo.

4. En el instante $t = 0$ una partícula sale despedida de la superficie $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 7$ por el punto $(0, 1, 1)$, en una dirección normal a la superficie a una velocidad de 5 unidades por segundo. ¿En que instante atraviesa la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 130$?

5. Supongamos que nos encontramos en un estadio y el publico esta haciendo la ola. Esta consiste en que el publico se pone de pie y se sienta de manera tal que se forma una ola que se desplaza dando vuelta al estadio. Supongamos que $H(x, t) = 5 + \cos(0,5x - t)$ determina la altura (en pies) sobre el nivel del piso, de la cabeza del espectador del asiento número x en el tiempo t segundos.

   a) Explicar el significado de $H(x, 5)$ en términos de la ola y encuentre el periodo.
   b) Explicar el significado de $H(2, t)$ en términos de la ola y encuentre el periodo.
   c) Encontrar la rapidez de la ola.
   d) Evalué e interprete $\frac{\partial H}{\partial x}(2, 5)$ en términos de la ola.
   e) Evalué e interprete $\frac{\partial H}{\partial t}(2, 5)$ en términos de la ola.

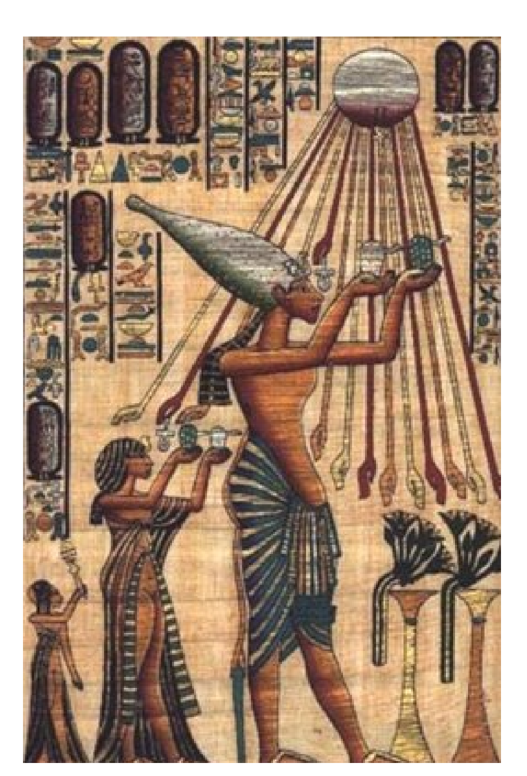
6. Una cuerda de guitarra que vibra se tensa a lo largo del eje x, entre $x = 0$ y $x = \pi$., si el campo escalar $Z = F(x, t) = \cos t sen x$, determina el desplazamiento en un tiempo t, de un punto x de la cuerda:

   a) ¿Que representan las funciones $F(x, 0)$ y $F(x, 1)$?
   b) $F(x, 0)$ representa el desplazamiento de toda la cuerda en el tiempo $t = 0$, osea no hay desplazamiento.
   c) $F(x, 1)$ representa el desplazamiento de toda la cuerda en el tiempo $t = 1$.
   d) ¿Que representan las funciones $F(0, t)$ y $F(1, t)$?

7. Se estima que el número de ejercicios que realiza diariamente los alumnos de un curso de cálculo vectorial está dado por el campo escalar $F(x, y) = 30\sqrt{x + y} + 40\sqrt{x - 1} - 58\sqrt{y + 1}$ donde x determina el número de alumnos juicios y y determina el número de alumnos desjuiciados. En la actualidad el curso consta de 14 alumnos juiciosos y 8 desjuiciados. Estime a que razón se estan realizando diariamente los ejercicios si se retira un alumno desjuiciado y llega un alumno juicioso.

CAPÍTULO 3

DIFERENCIABILIDAD

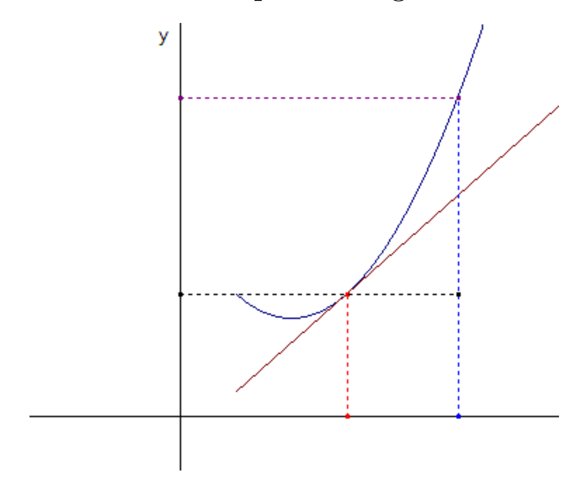


Busca a tu complementario
que marcha siempre contigo
y suele ser tu contrario
ANTONIO MACHADO
"Proverbios y cantares XVI"

3.1. La diferencial

A partir de los anteriores cursos de cálculo sabemos que toda función f de $I \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que sea derivable en un punto $a \in I$ es continua en a, para funciones de varias variables esta afirmación no siempre es cierta.Una manera de justificar el concepto de diferenciabilidad para funciones de variable real y valor real es la siguiente: Una función f de $I \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es diferenciable en $a \in I$ si existe una constante A tal que $f(a+h) = f(a) + Ah + r(h)$ donde r es una función tal que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{r(h)}{h} = 0$ entonces despejando A obtenemos $A = \dfrac{f(a+h) = f(a)}{h} - \dfrac{r(h)}{h}$ y aplicando límite cuando $h \to 0$ $A = f'(a)$ por lo tanto $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r(h)$.

La siguiente gráfica determina la interpretación geométrica de la diferencial



La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en a es igual a $y = f'(a)(x-a)+f(a)$ y su imagen en $a+h$ es $f'(a)h + f(a)$ por lo tanto $r(h) = f(a+h) - f'(a) - f(a)$, vemos que $r(h)$ es la distancia entre la recta tangente y la curva en el punto $a+h$ y a medida que h tiende a cero el residuo $r(h)$ tiende a cero, esto garantiza que la curva es suave en cercanias de a.

Consideremos ahora un campo escalar F de *de* $D \subset \mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}$ y $(a,b) \in D$, generalizando la definición anterior diremos que F es diferenciable en (a,b) si existen A y B constantes tales que $F((a,b)+(v_1,v_2)) = F(a,b)+Av_1+Bv_2+R(v_1,v_2)$ donde $\lim\limits_{(v_1,v_2)\to(0,0)}\dfrac{R(v_1,v_2)}{\|(v_1,v_2)\|} = 0$ y $\boldsymbol{v} = [v_1, v_2]$ es un vector de $\mathbb{R}^2$, veamos cuales son las constantes A y B.

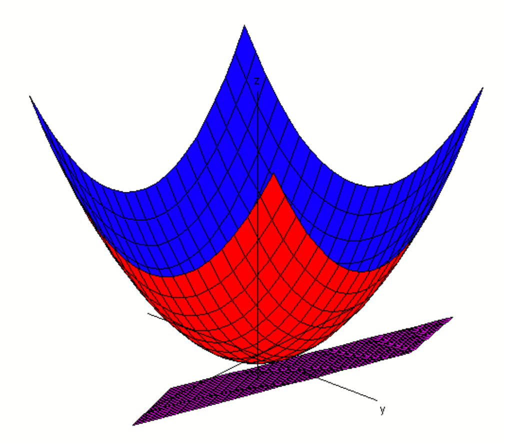
Haciendo $\boldsymbol{v} = [v_1, 0]$, $\dfrac{R(v_1,0)}{v_1} = \dfrac{F(a+v_1,b) - F(a,b)}{v_1} - A$ y aplicando lìmite cuando v_1 tienede a cero $A = \dfrac{\partial F}{\partial x}(a,b)$

de igual manera ahora sea $\boldsymbol{v} = [0, v_2]$, $\dfrac{R(0,v_2)}{v_2} = \dfrac{F(a,b+v_2) - F(a,b)}{v_2} - B$ y aplicando lìmite cuando v_2 tienede a cero $B = \dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b)$

Concluimos que una condición necesaria para que un campo escalar F sea diferenciable en un punto (a, b) es que existan sus derivadas parciales en ese punto, sin embargo esta condición no es suficiente como veremos más adelane, y $F((a, b) + (v_1, v_2)) = F(a, b) + \dfrac{\partial F}{\partial x}(a, b)v_1 + \dfrac{\partial F}{\partial y}(a, b)v_2 + R(v_1, v_2)$.

Geometricamente ahora la función está representada por una superficie y a medida que nos acercamos a un punto donde la función es diferenciable la superficie se parece más a un plano. Sea S una superficie de ecuación $z = F(x, y)$ donde F posee primeras derivadas parciales continuas en (a, b) y sea $P(a, b, c)$ un punto de S. Sean C_1 la intersección de S y con el plano $x = a$, y C_2 la intersección de S con el plano $y = b$. Las curvas C_1 y C_2 pasan por el punto P y tienen por tangentes a las rectas T_1 y T_2 entonces si existe un plano tangente a la superficie S en el punto P contiene a las rectas T_1 y T_2, o sea si C es cualquier otra curva sobre la superficie S que pasa por P, entonces la tangente a C en P esta contenida en el plano tangente a S en P, luego el plano tangente a S en P esta formado por todas las tangentes en P a curvas contenidas en S y que pasan por P. Por lo tanto, el plano tangente a S en P es el plano que mejor aproxima a la superficie S es un entorno del punto P.

Supongamos que F tiene derivadas parciales continuas, la ecuación del plano tangente a la superficie $z = F(x, y)$ en el punto $P(a, b, c)$ es $z = F(a, b) + F_x(a, b)(x - a) + F_y(a, b)$ La función lineal cuya gráfica es este plano tangente, es decir $L(x, y) = F(a, b) + F_x(a, b)(x - a) + F_y(a, b)$ se denomina linealización de F en (a, b) y la aproximación $F(x, y) \approx F(a, b) + F_x(a, b)(x - a) + F_y(a, b)$ se llama aproximación lineal o aproximación del plano tangente de F en (a, b)



Ejemplo 3.1.1 *Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 - y^2$ en el punto* $(2, 1, 3)$

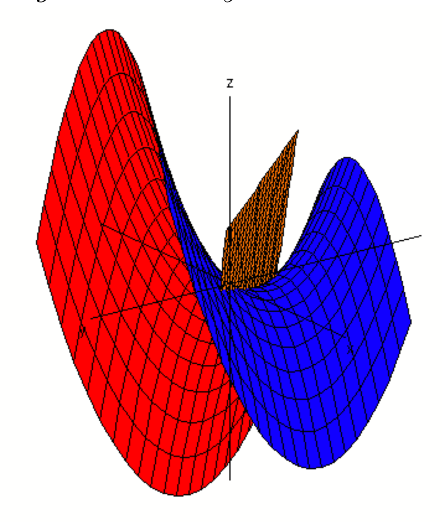
Si $F(x, y) = x^2 - y^2$ *entonces*

$F_x(x, y) = 2x \qquad F_y(x, y) = -2y$

$F_x(2, 1) = 4 \qquad F_y(2, 1) = -2$

Entonces la ecuación del plano tangente en $(2, 1, 3)$ *es* $z - 3 = 4(x - 2) - 2(y - 1)$

luego $z = 4x - 2y - 3$



La linealización de F *en* $(2,1)$ *es* $L(x,y) = 4x - 2y - 3$ *y es una buena aproximación de* $F(x,y)$

cuando (x,y) *está cerca de* $(2,1)$ *y la aproximación lineal es* $F(x,y) \approx 4x - 2y - 3$

en el punto $(2{,}1, 0{,}9)$ *la aproximación lineal es* $F(2{,}1, 0{,}99) \approx 4(2{,}1) - 2(0{,}99) - 3 = 3{,}42$

que es muy cercana al valor verdadero de $F(2{,}1, 0{,}99) = (2{,}1)^2 - (0{,}99)^2 = 3{,}4299$

Como toda función f de $I \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que sea derivable en un punto $\boldsymbol{a} \in I$ es continua en $\boldsymbol{a}$ y puede ser aproximada en un entorno de $\boldsymbol{a}$ mediante una función lineal, para una función de varias variables $\boldsymbol{F}$ de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ que posea todas las derivadas direccionales $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{a};\boldsymbol{v})$ para todo $\boldsymbol{v}$, no podemos asegurar que sea continua en $\boldsymbol{a}$, debido a esto necesitamos de un concepto que implique la continuidad y la existencia de las derivadas, dicho concepto se denomina LA DIFERENCIAL y $\boldsymbol{F}$ puede ser aproximada en un entorno de $\boldsymbol{a}$, $B(\boldsymbol{a};\delta) \subset D$, tal que si $B(\boldsymbol{a};\delta) \subset D$ para todo vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\boldsymbol{v}\| < \delta$ de modo que $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}) \in B(\boldsymbol{a};\delta)$.

Un campo escalar F *de* $D \subset R^n$ *en* R*, se dice que es diferenciable en* $\boldsymbol{a} \in D$*, si existe una transformación lineal* $T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v})$ *de* R^n *en* R *y un campo escalar* E *: de* R^n *en* R *, tales que* $F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v}) = F(\boldsymbol{a}) + T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}) + E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{v})$ *para* $||\boldsymbol{v}|| < \delta$ *de manera que* $E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{v}) \to 0$ *cuando* $\|\boldsymbol{v}\| \to 0$*.*

Nota: $T_{\boldsymbol{a}}$ es llamada la diferencial de $\boldsymbol{F}$ en $\boldsymbol{a}$

Teorema 3.1.1 *Si* $\boldsymbol{F}$ *es una función vectorial de* $D \subset \mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}^m$ *diferenciable en* $\boldsymbol{a}$*, si y solamente si sus funciones coordenadas* F_k*(campos escalares) son diferenciables en* $\boldsymbol{a}$*.*

Teorema 3.1.2 *Si* F *es un campo escalar de* $D \subset \mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}^m$ *diferenciable en* $\boldsymbol{a}$ *con diferencial* $T_{\boldsymbol{a}}$ *entonces existe la derivada* $F'(\boldsymbol{a};\boldsymbol{v})$*, para todo* $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ *y* $T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}) = F'(\boldsymbol{a};\boldsymbol{v})$

Demostración. Veamos que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{F(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}) - F(\boldsymbol{a})}{t} = F'(\boldsymbol{a};\boldsymbol{v})$ existe para todo $\boldsymbol{a}$ y es igual a $T_a(\boldsymbol{v})$

Como F es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ para todo $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ con $\|\boldsymbol{w}\| <\in$
entonces $F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{w}) = F(\boldsymbol{a}) + T_a(\boldsymbol{w}) + E(\boldsymbol{w})$ con $\lim\limits_{\|\boldsymbol{w}\|\to 0} \frac{E(\boldsymbol{w})}{\|\boldsymbol{w}\|} = 0$
Sea $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$
(i) Si $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ entonces $F'(\boldsymbol{a};\boldsymbol{0}) = T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$
(ii) Si $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ sea $\boldsymbol{w} = t\boldsymbol{v}$ con $|t| < \dfrac{\in}{\|\boldsymbol{v}\|}$
entonces $F(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}) = F(\boldsymbol{a}) + T_a(t\boldsymbol{v}) + E(t\boldsymbol{v})$
$= F(\boldsymbol{a}) + tT_a(\boldsymbol{v}) + E(t\boldsymbol{v})$
luego $\dfrac{F(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}) - F(\boldsymbol{a})}{t} = T_a(\boldsymbol{v}) + \dfrac{E(t\boldsymbol{v})}{t}$
aplicando limite cuando t tiende a cero
$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{F(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}) - F(\boldsymbol{a})}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\left(T_a(\boldsymbol{v}) + \dfrac{E(t\boldsymbol{v})}{t}\right) = T_a(\boldsymbol{v}) \neq 0$ ■

Teorema 3.1.3 *Si F es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ con diferencial $T_{\boldsymbol{a}}$ entonces F es continuo en $\boldsymbol{a}$*

Teorema 3.1.4 *Si F es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ con diferencial $T_{\boldsymbol{a}}$ entonces F es derivable en $\boldsymbol{a}$ (existe $F'(\boldsymbol{a};\boldsymbol{v})$ para todo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ unitario)*

Ejemplo 3.1.2 *Verificar que el campo escalar $F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ no es diferenciable en el origen.*
consideremos el vector $v = [v_1, v_2]$ unitario
aplicando el teorema
$\phi(t) = F((0,0) + t\,[v_1, v_2])$
$= F(tv_1, tv_2) = \sqrt{t^2(V_1^2 + V_2^2)} = |t|$
concluimos que ϕ no es derivable en el origen
por lo tanto F no es diferenciable en el origen.

Teorema 3.1.5 *Si existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial F}{\partial x_k}$ en una cierta bola $B(\boldsymbol{a};\delta)$ y son continuas en $\boldsymbol{a}$ entonces F es diferenciable en $\boldsymbol{a}$*

Teorema 3.1.6 *Si F es un campo escalar de $D \subseteq \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$diferenciable entonces $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$*

Propiedad 3.1.1 *Si F y G son campos escalares de $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ diferenciables en $\boldsymbol{a}$ entonces*
(1) $F \pm G$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$
(2) kF es diferenciable en $\boldsymbol{a}$
(3) FG es diferenciable en $\boldsymbol{a}$
(4) $\dfrac{F}{G}$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$

Todo campo escalar polinomial es diferenciable en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 3.1.3 *El campo escalar* $F(x,y)=\dfrac{2x+3y}{x^{2‘}+y^2+1}$ *es diferenciable en todo* $\mathbb{R}^2$*, pues es el cociente de dos funciones polinomiales y ademas el denominador es siempre diferente se cero.*

Si $z=F(x,y)$ *es un campo escalar de* R^2 *en* R *y suponga que* x *cambia de* a *a* $a+\triangle x$ *y* y *cambia de* b *a* $b+\triangle y$*,entonces el correspondiente incremento de* z *es* $\triangle z = F(a+\triangle x, b+\triangle y)-F(a,b)$*, luego.*$\triangle z$ *representa el cambio en el valor de* F *cuando* (x,y) *cambia de* (a,b) *a* $(a+\triangle x, b+\triangle y)$*.*

Si $z=F(x,y)$ *es un campo escalar de* R^2 *en* R *que posee derivadas parciales continuas en* D *entonces si* (a,b) *es un punto interior de* D $\triangle F = F(a+\triangle x, b+\triangle y)-F(a,b)\approx F_x(a,b)\triangle x+F_y(a,b)\triangle y$ *luego* $F(a+\triangle x, b+\triangle y)\approx F(a,b)+F_x(a,b)\triangle x+F_y(a,b)\triangle y$

Si $z=F(x,y)$ *es un campo escalar de* R^2 *en* R *y* $\triangle x$ *y* $\triangle y$ *son los incrementos de* x *y* y *respectivamente entonces las diferenciales de* x *y* y *son* $dx=\triangle x$ *y* $dy=\triangle y$ *y la diferencial total de* z *es igual a* $dz=F_x(a,b)\triangle x+F_y(a,b)\triangle y$

Si $z=F(x,y)$*, entonces* F *es diferenciable en* (a,b) *si* $\triangle z$ *se puede exprezar en la forma* $\triangle z = F_x(a,b)\triangle x+F_y(a,b)\triangle y+\epsilon_1\triangle x+\epsilon_2\triangle y$ *donde* $\epsilon_1,\ \epsilon_2\to 0$ *cuando* $(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)$

Si $z=F(x)$ *es un campo escalar de* $U\subset R^n$ *en* R *diferenciable en* $x_0\in U$*, entonces* $\triangle z=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(x_0)\triangle x_i+\sum\limits_{i=1}^{n}E_i\triangle x_i$ *donde* $E_i\to 0$ *cuando* $\triangle x_i\to 0$

Ejemplo 3.1.4 *Si* $z=3x^2+2y^2$ *y* (x,y) *cambia de* $(1,2)$ *a* $(1{,}1, 1{,}95)$ *compare los valores de* $\triangle z$ *y* dz*.*

$dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy = 6xdx+4ydy$

si $x=1,\ dx=\triangle x=0{,}1,\ y=2,\ dy=\triangle y=-0{,}05$

entonces $dz=6(1)(0{,}1)+4(2)(-0{,}05)=0{,}2$

el incremento de z *es* $\triangle z=F(1{,}1, 1{,}95)-F(1,2)$

$=0{,}235$

se puede ver que $\triangle z\approx dz$ *pero es más facíl calcular* dz

Ejemplo 3.1.5 *El radio y la altura de un cilindro miden* 8 *cm y* 20 *cm respectivamente, pero hay un error en la medición de máximo* 0,1 *cm estime el error máximo en el calculo del volumen.*

El volumen de un cilindro de radio r y altura h es igual a $V = \pi r^2 h$

La diferencial de V es $dV = \dfrac{\partial V}{\partial r}dr + \dfrac{\partial V}{\partial h}dh = 2\pi r h dr + \pi r^2 dh$

como cada error es de máximo 0,1 *cm,* $|\triangle r| \leq 1$ *y* $|\triangle h| \leq 1$

si $r = 8$, $h = 20$, $dr = 1$ *y* $dh = 0{,}1$

entonces $dV = 2\pi(8)(20)(0{,}1) + \pi(8)^2(0{,}1) = 38{,}4\pi$ cm^3 *es el error máximo en el calculo del volumen.*

Sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar definido en un conjunto abierto D, se dice que F es homogéneo de grado α (real) si $F(t\boldsymbol{x}) = t^\alpha F(\boldsymbol{x})$ para todo $\boldsymbol{x} \in D$, para todo $t > 0$.

Ejemplo 3.1.6 *El campo escalar* $F(x, y) = 2x^3 + 5xy^2 - y^3$ *es homogéneo de grado 3.*

$F(tx, ty) = 2(tx)^3 + 5(tx)(ty)^2 - (ty)^3 = 2t^3x^3 + 5t^3xy^2 - t^3y^3$

$= t^3(2x^3 + 5xy^2 - y^3) = t^3F(x, y)$

Teorema 3.1.7 *de Euler*[1] *para funciones homogéneas. Sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar homogéneo de grado α definido en un conjunto abierto D de $\mathbb{R}^n$. Sea $\boldsymbol{a}$ un punto no nulo de D y sea $\boldsymbol{v} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}$ un vector unitario en dirección de $\boldsymbol{a}$ entonces si la derivada direccional $F'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{v})$ existe:* $F'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{v}) = \dfrac{\alpha}{\|\boldsymbol{a}\|}F(\boldsymbol{a})$.

Demostración. Utilizando la definición de derivada direccional

$$F'(a; \boldsymbol{v}) = \lim_{t\to 0}\frac{F(a + t\boldsymbol{v}) - F(a)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{F\left(a + t\dfrac{a}{\|a\|}\right) - F(a)}{t}$$

1



Leonhard Euler (nombre completo, Leonhard Paul Euler) nació el 15 de abril de 1707 en Basilea, Suiza, y murió el 18 de septiembre de 1783 en San Petersburgo, Rusia. Fue un respetado matemático y físico, y está considerado como el principal matemático del siglo XVIII y como uno de los más grandes de todos los tiempos. Vivió en Rusia y Alemania la mayor parte de su vida y realizó importantes descubrimientos en áreas tan diversas como el cálculo o la teoría de grafos. También introdujo gran parte de la moderna terminología y notación matemática, particularmente para el área del análisis matemático, como por ejemplo la noción de función matemática.[1] También se le conoce por sus trabajos en los campos de la mecánica, óptica y astronomía. Euler ha sido uno de los matemáticos más prolíficos, y se calcula que sus obras completas reunidas podrían ocupar entre 60 y 80 volúmenes.[2] Una afirmación atribuida a Pierre-Simon Laplace expresa la influencia de Euler en los matemáticos posteriores: «Lean a Euler, lean a Euler, él es el maestro de todos nosotros.

$$= \lim_{t\to 0} \frac{F\left(\dfrac{\|a\|+t}{\|a\|}a\right) - F(a)}{t}$$

como F es homogéneo de grado α

$$F\left(\frac{\|a\|+t}{\|a\|}a\right) = \left(\frac{\|a\|+t}{\|a\|}a\right)^{\alpha} F(a)$$

luego $F'(a;\boldsymbol{v}) = F'(a;\boldsymbol{v}) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\left(\dfrac{\|a\|+t}{\|a\|}a\right)^{\alpha} F(a) - F(a)}{t}$

$$= F(a)\lim_{t\to 0} \frac{\left(\dfrac{\|a\|+t}{\|a\|}a\right)^{\alpha} - 1}{t}$$

$$= F(a)\frac{\alpha}{\|a\|} \quad \blacksquare$$

Corolario 3.1.1 *Sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar homogéneo de grado α definido en un conjunto abierto D de $\mathbb{R}^n$.entonces $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = \alpha F(\boldsymbol{x})$.*

Ejercicios sección 3.1

1. Para cada uno de los campos escalares en el punto dado, uilice la definición de diferenciabilidad para exprezar el residuo.

    a) $F(x,y) = 3xy$, $p(2,5)$
    b) $F(x,y) = \dfrac{x+2}{y-3}$, $p(-1,2)$
    c) $F(x,y) = \ln x + \ln y$, $p(2,3)$

2. Determine la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto dado.

    a) $z = xy$, $p(1,1,1)$
    b) $z = x\ln y$, $p(2,1,0)$
    c) $z = \cos(x-2y)$, $p(2,1,1)$

3. Encuentre la aproximación lineal del campo escalar F en el origen y utilicela para aproximar $F(0{,}05, -0{,}2)$.

    a) $F(x,y) = x^2 + y^2 + 3$
    b) $F(x,y) = \dfrac{x+2}{y+3}$
    c) $F(x,y) = e^x \cos y$

4. Muestre que los campos escalares dados son diferenciables en su dominio.

   a) $F(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   b) $F(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$

   c) $F(x,y) = Ln(1+x^2+y^2)$

5. Muestre que las funciones vectoriales dadas son diferenciables en su dominio.

   a) $\boldsymbol{F}(x,y) = [x^2+3xy+y^2, \sqrt{x+y}]$

   b) $\boldsymbol{F}(x,y) = [xseny, y\cos x, \tan xy]$

   c) $\boldsymbol{F}(x,y) = \left[e^{x+2y}, \ln(x+y), \dfrac{x}{y}\right]$

6. Demuestre que los campos escalares dados no son diferenciables en el origen

   a) $F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0{,}0) \end{cases}$

   b) $F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^3+y^3} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0{,}0) \end{cases}$

   c) $F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0{,}0) \end{cases}$

7. Determine si el campo escalar dado es homogéneo.

   a) $F(x,y) = e^{xy}$

   b) $F(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

   c) $F(x,y) = x\tan y$

8. El radio de la base y la altura de un cono circular recto miden 12 cm y 25 cm respectivamente, si hay un error en la mediciòn de 0,1 cm en cada medida, utilizando diferenciales estime el error en el calculo del volumen del cono.

9. La siguiente tabla registra la velocidad de un ventilador de un disposiivo de aire acondicionado en terminos de la humedad y la temperatura ambiente.

$h\backslash t$	10	20	30
0,25	35	53	68
0,50	25	42	57
0,75	18	27	34

   determine una aproximación lineal a la función velocidad para $h = 50$ y $t = 10$, y estime la velocidad cuando $h = 55$ y $t = 12$.

10. Utilizando un CAS construya una funciòn que permita hallar la diferencial total de un campo escalar dado.

3.2. Gradiente

Si F es un campo escalar de $U \subset R^n$ en R diferenciable en $\boldsymbol{a} \in U$ entonces el vector $\nabla F(\boldsymbol{a}) = \left[\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})\right]$ si existe se denomina gradiente de F en $\boldsymbol{a}$.

Ejemplo 3.2.1 *Encontrar el gradiente del campo escalar $F(x, y, z) = sen(x + 2y + 3z)$ en el punto $(0, \pi/2, \pi/3)$.*

Hallamos las primeras derivadas parciales de F en $(0, \pi/2, \pi/3)$,

$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = cos(x + 2y + 3z) = cos(0 + \pi + \pi) = cos(2\pi) = 1,$

$\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 2cos(x + 2y + 3z) = 2cos(0 + \pi + \pi) = 2cos(2\pi) = 2$

$\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 3cos(x + 2y + 3z) = 3\cos 0 + \pi + \pi) = 3cos(2\pi) = 3$

luego $\nabla F\,(0, \pi/2, \pi/3) = [1, 2, 3]$

Propiedad 3.2.1 *Si F y G son campos escalares de $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ diferenciables en $\boldsymbol{a} \in D_1 \cap D_2$ entonces:*

(i) $\nabla(F \pm G)(\boldsymbol{a}) = \nabla F(\boldsymbol{a}) \pm \nabla G(\boldsymbol{a})$

(ii) $\nabla(kF)(\boldsymbol{a}) = k\nabla F(\boldsymbol{a})$, $(k \in \mathbb{R})$

(iii) $\nabla(FG)(\boldsymbol{a}) = \nabla F(\boldsymbol{a})G(\boldsymbol{a}) + F(\boldsymbol{a})\nabla G(\boldsymbol{a})$

(iv) $\nabla \dfrac{F}{G}(\boldsymbol{a}) = \dfrac{\nabla F(\boldsymbol{a})G(\boldsymbol{a}) - F(\boldsymbol{a})\nabla G(\boldsymbol{a})}{(G(\boldsymbol{a}))^2}$ *si* $G(\boldsymbol{a}) \neq 0$

Ejemplo 3.2.2 *Un campo escalar F de $U \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, diferenciable en $(2, -1)$ posee derivadas direccionales iguales a 3 en dirección al punto $(3, -1)$ e igual a -2 en dirección al punto $(2, -2)$. Hallar la derivada direccional de F en $(2, -1)$ en direcciòn al punto $[3, 0]$*

Primero determinamos el gradiente de F en $(2, -1$

Construimos los vectores directores de las derivadas

$\boldsymbol{v}_1 = [(3, -1) - (2, -1)] = [1, 0]$

entonces $F'((2, -1); [1, 0]) = 3 = \dfrac{\partial F}{\partial x}(2, -1)$

ahora $\boldsymbol{v}_2 = [(3, -1) - (2, -1)] = [0, -1]$

entonces $F'((2, -1); [0, -1]) = -2 = -\dfrac{\partial F}{\partial x}(2, -1)$

por lo tanto $\nabla F(2, -1) = [3, 2]$

Ahora construimos el vector director $\boldsymbol{v}_3$

$\boldsymbol{v}_3 = [(3, 0) - (2, -1)] = [1, 1]$

lo hacemos unitario, dividiendolo por su norma

entonces como F es diferenciable en $[2,-1]$

$$F'\left((2,-1);\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=[3,2]\bullet\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Teorema 3.2.1 *Si F es un campo escalar de $D\subset\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ diferenciable en $\boldsymbol{a}\in D$ y $\boldsymbol{v}$ es un vector unitario de $\mathbb{R}^n$, entonces $F'(\boldsymbol{a};\boldsymbol{v})=\nabla F(a)\bullet\boldsymbol{v}$*

Demostración. Por definición $F'(\boldsymbol{a};\boldsymbol{v})=T_a(\boldsymbol{v})$. Y como T es una transformación lineal, entonces $F'(\boldsymbol{a};\boldsymbol{v})=T_a(v_1\boldsymbol{e}_1+v_2\boldsymbol{e}_2+...+v_n\boldsymbol{e}_n)$

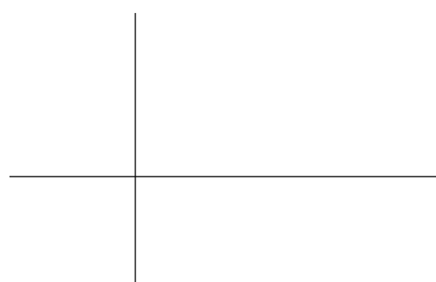
$=T_a(v_1e_1)+T_{\boldsymbol{x}_0}(v_2e_2)+...+T_{\boldsymbol{x}_0}(v_ne_n)$

$=v_1T_a(e_1)+v_2T_a(e_2)+...+v_nT_a(e_n)$

$=(v_1,v_2,...,v_n)\bullet(T_a(e_1),T_a(e_2),...,T_a(e_n))$

$=(v_1,v_2,...,v_n)\bullet\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}),\frac{\partial F}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}),...,\frac{\partial F}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right)$

$=\boldsymbol{v}\bullet\nabla F(\boldsymbol{a})=\nabla F(a)\bullet\boldsymbol{v}$ ■



Grafica gradiente

Teorema 3.2.2 *Si F es un campo escalar de $D\subset\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ diferenciable en $\boldsymbol{a}\in D$ entonces $F'(\boldsymbol{a};\boldsymbol{v})=\|\nabla F(\boldsymbol{a})\|\cos\theta$ donde θ es el ángulo entre $\nabla F(\boldsymbol{a})$ y el vector $\boldsymbol{v}$*

Ejemplo 3.2.3 *Hallar la derivada direccional de $F(x,y)=e^{-x}\cos y$ en el punto $(1,0)$ en dirección $[1,1]$*

Como el vector $[1,1]$ no es unitario lo dividimos por su norma, $\boldsymbol{v}=\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

Aplicando el teorema $F'\left((1,0);\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right)=\nabla F(1,0)\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

$\nabla F(x,y)=[-e^{-x}\cos y,-e^{-x}seny]=[-e^{-1},-e^{-1}]$

luego $F'\left((1,0);\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right)=[-e^{-1},-e^{-1}]\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]=-\frac{2e^{-1}}{\sqrt{2}}$

Teorema 3.2.3 *Si F es un campo escalar de $D\subseteq\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ diferenciable en (a,b) y $\nabla F(a,b)\neq\mathbf{0}$ entonces $\nabla F(a,b)$ es ortogonal a la curva de nivel de F que pasa por (a,b).*

Teorema 3.2.4 *del valor medio. Si F es un campo escalar diferenciable en cada punto del segmento $\boldsymbol{ab}$ entonces existe $\mathbf{c}$ punto del segmento tal que $F(\boldsymbol{b})-F(\boldsymbol{a}) = \nabla F(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$*

Algunas de las aplicaciones interesantes de cálculo diferencial sobre campos escalares diferenciables a partir del gradiente son las variaciones máximas y/o mínimas en un punto dado,y la ecuación de la recta normal y del plano tangente a una superficie.

Propiedad 3.2.2 *Derivadas direccionales máximas y mínimas. Si F es un campo escalar de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, y $\boldsymbol{a} \in D$, entonces la derivada direccional $F'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{v})$ es :*
(i) Máxima si $\boldsymbol{v}$ tiene la misma dirección del $\nabla F(\boldsymbol{a})$ y su valor es $\|\nabla F(\boldsymbol{a})\|$
(ii) Minima si $\boldsymbol{v}$ tiene la misma dirección de $-\nabla F(\boldsymbol{a})$ y su valor es $-\|\nabla F(\boldsymbol{a})\|$
(iii) Nula si $\boldsymbol{v}$ y $\nabla F(\boldsymbol{a})$ son ortogonales

Alexis Claude Clairautl [2]

Ejemplo 3.2.4 *La temperatura en un punto (x, y) de una lamina esta dada por $T(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ desde el punto $(1, 2)$, en que dirección crece la temperatura más rápidamente? A que ritmo se produce este crecimiento ?*
Hallamos el gradiente de T en $(1, 2)$
$\nabla T(x, y) = \left[\dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\right]$
$\nabla T(1, 2) = \left[\dfrac{3}{25}, \dfrac{4}{25}\right]$
la dirección de mayor crecimiento en $(1, 2)$ es $\left[\dfrac{3}{25}, \dfrac{4}{25}\right]$
y la razón de mayor crecimiento es $\left\|\left[\dfrac{3}{25}, \dfrac{4}{25}\right]\right\| = 1$


2



Alexis Claude Clairault(también conocido como Clairault, a secas) (3 de mayo de 1713 - y 17 de mayo de 1765) fue un matemático francés. nacido en París, donde su padre era profesor de matemáticas, fue considerado un niño prodigio. A los 12 años escribió un desarrollo sobre cuatro curvas geométricas,y llegó a alcanzar tal progreso en el tema (bajo la tutela de su padre), que a la edad de 13 años leyó ante la Academia francesa un resumen de las propiedades de las cuatro curvas que había descubierto. Tres años más tarde, completó un tratado sobre curvas de doble curvatura, Recherches sur les courbes a double courbure, que la valió su admisión a la Academia de Ciencias Francesa tras su publicación en 1731, a pesar de que aún no contaba con la mínima edad legal de 18 años para ser admitido. En 1739 y 1740, Clairaut publicó más trabajos sobre el cálculo integral, en particular sobre la existencia de factores integrantes para la resolver ecuaciones diferenciales de primer orden (un tema que interesó también a Johann Bernoulli y Reyneau). Concretamente, en 1740 publica su obra Sobre la integración o la construcción de las ecuacio-nes diferenciales de primer orden, donde introduce, independientemente de Leonhard Euler (1707-1783), el uso del factor integrante.*

Si S es una superficie de $\mathbb{R}^3$ definida implicitamente por un campo escalar F de $D \subset \mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$, diferenciable en $\boldsymbol{a} \in D$, entonces $\nabla F(\boldsymbol{a})$ es ortogonal a S en $\boldsymbol{a}$ y $\nabla F(\boldsymbol{a}) \bullet [(x,y,z) - \boldsymbol{x}_0] = 0$ determina la ecuación del plano tangente a S en $\boldsymbol{a}$ y $[x,y,z] = \boldsymbol{a} + t\nabla F(\boldsymbol{a})$ determina la ecuación vectorial de la recta normal a S en $\boldsymbol{a}$.

Ejemplo 3.2.5 *Hallar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie determinada por $z = x^2 + y^2$ en el punto $(2,1,5)$.*
Llevamos la ecuación de la superficie a la forma implicita $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$
Calculamos la normal del plano tangente a S (gradiente de F)
$\nabla F(x,y,z) = [2x, 2y, -1]$ *en el punto* $\nabla F(2,1,5) = [4,2,-1]$
entonces $[4,2,-1] \bullet [x-2, y-1, z-5] = 0$
$4x + 2y - z = 5$ *determina la ecuación del plano tangente*
y $[x,y,z] = [2,1,5] + t\,[4,2,-1]$ *es la ecuación vectorial de la recta normal*

Ejercicios.secciòn 3.2.

1. Hallar el gradiente del campo escalar F en el punto P

   a) $F(x,y) = x^2y^2$, $P = (2,3)$
   b) $F(x,y) = \sqrt[3]{xy}$, $P(3,5)$
   c) $F(x,y,z) = Tan(x-y+z)$, $P = (\pi,\pi,\pi)$

2. Hallar la derivada direccional del campo escalar dado en el punto P en dirección $\boldsymbol{v}$

   a) $F(x,y) = e^{2x-3y}$, $P = (1,-1)$ y $\boldsymbol{v} = [3,4]$
   b) $F(x,y) = x^4 + 2xy^2 + y^3$, $P = (0,2)$ y $\boldsymbol{v} = [-1,1]$
   c) $F(x,y,z) = \sqrt{xyz}$, $P = (1,-1,1)$ y $\boldsymbol{v} = [1,2,3]$

3. Para el campo escalar $F(x,y) = x^2 + y^2$ determine los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ donde el gradiente de F :

   a) Forma un ángulo de $\pi/4$ con el vector $U = [1,1]$
   b) Tenga la misma direccion del vector $U = [-3,-4]$
   c) Sea perpendicular al vector $U = [-1,1]$

4. Encuentre la razón de cambio máxima de F en P y la dirección en que esta ocurre.

   a) $F(x,y) = e^{2x+3y}$, $P = (0,0)$
   b) $F(x,y) = x^x + y^y$, $P = (1,1)$
   c) $F(x,y,z) = ArcTan\sqrt{x+y+z}$, $P = (1,1,1)$

5. Halle la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie dada en el punto P

   a) $z = xy \quad P = (1, 2, 2)$
   b) $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)} \; P = (0, 0, 0)$
   c) $z = \sqrt{x + y} \; P = (2, 2, 2)$

6. Sea F es un campo escalar de $D \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, diferenciable en P. Suponga que $\dfrac{\partial F}{\partial x}(P) = 3$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}(P) = 2$, en que dirección:.

   a) $\dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{v}}(P) = 1$
   b) $\dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{v}}(P) = -1$
   c) $\dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{v}}(P) = 0$

7. Determine los puntos del elipsoide $(x - 1)^2 + 2(y - 2)^2 + 3(z + 1)^2 = 6$ donde sus planos tangentes son paralelos al plano xy

8. Una esfera con centro $(1, 2, 1)$ pasa por el origen. Halle la ecuación del plano tangente a esta esfera en el origen.

9. Demuestre que el plano tangente al hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en el punto $(a, b, 0)$ es igual a $ax + by = 1$

10. Determine la intersección entre el eje Z y el plano tangente a la superficie $z = e^{x+y}$ en el punto $(1, -1, 1)$

11. Determine los puntos de la superficie $z = x^4 - 4xy^3 + 6y^2 - 2$ donde el plano tangente es horizontal.

12. Si $F(x, y) = x^2 - y^2$, utilice el gradiente $\nabla F(2, 1)$ para determinar la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel $F(2, 1) = 3$ en el punto $(2, 1)$. Grafique la curva de nivel, la recta tangente y el gradiente.

13. Un pajaro carpintero está contruyendo su nido en un árbol a una altura de 4 m. Si desde alli vuela en dirección al punto $(1, 0, 4)$ su temperatura aumenta a razón de 2^0 por m, si vuela en dirección al punto $(0, -1, 4)$ su temperatura no cambia, si vuela en dirección al punto $(0, 0, 3)$ su temperatura disminuye a razón de 3^0 por m. ¿A que razón cambia su temperatura cuando vuela en dirección al punto $(-1, 1, 5)$?. Considere el árbol como el eje z y su base el origen $(0, 0, 0)$.

14. Utilizando un CAS grafique algunas curvas de nivel de un campo escalar dado y algunos gradientes.

3.3. Regla de la cadena

La regla de la cadena para funciones de variable real y valor real tratadas en los anteriores cursos de cálculo permite derivar una función compuesa, para funciones de varias variables primero consideraremos las funciones vectoriales ya que en estas funciones fue posible determinar la compuesta, luego consideraremos la regla de la cadena para camos escalares.

Si $\boldsymbol{F}$ es una función vectorial de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ diferenciable en $\boldsymbol{a} \in D$, entonces la matriz[3] $J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) = [\nabla F_k(\boldsymbol{a})]$ se denomina matriz jacobiana de $\boldsymbol{F}$ en $\boldsymbol{a}$. Las filas de la matriz jacobiana de una función vectorial $\boldsymbol{F}$ estan determinadas por los gradientes sus funciones componentes F_k.

Si $m = 1$ la matriz jacobiana es igual al gradiente.

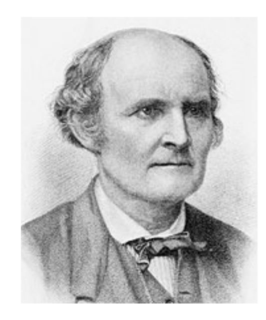
Teorema 3.3.1 *Si $\boldsymbol{F}$ es una función vectorial de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ diferenciable en $\boldsymbol{a} \in D$ y $\boldsymbol{G}$ es una función vectorial de $U^* \subset \mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^p$ diferenciable en $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) \in D^*$, entonces $\boldsymbol{G}o\boldsymbol{F}$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y ademas $J(\boldsymbol{G}o\boldsymbol{F})(\boldsymbol{a}) = J\boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}))J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$..Nota : D^*=$\boldsymbol{F}(D)$*

Ejemplo 3.3.1 *Determine la matriz jacobiana de la función vectorial $\boldsymbol{F}(x,y) = [x^2y^3, 5x^3 - 2y^4$ en $p = (2,3)$*

$$J\boldsymbol{F}(x,y) = \begin{bmatrix} 2xy^3 & 3x^2y^2 \\ 15x^2 & -8y^3 \end{bmatrix}$$

$$J\boldsymbol{F}(2,3) = \begin{bmatrix} 2(2)(3)^3 & 3(2)^2(3)^2 \\ 15(2)^2 & -8(3)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 108 & 324 \\ 60 & -216 \end{bmatrix}$$

3



Arthur Cayley (Richmond, Reino Unido, 16 de agosto de 1821 - Cambridge, 26 de enero de 1895) fue un matemático británico. Es uno de los fundadores de la escuela británica moderna de matemáticas puras. Además de su predilección por las matemáticas, también era un ávido lector de novelas, le gustaba pintar, apasionado de la botánica y de la naturaleza en general, y aficionado al alpinismo. Fue educado en el Trinity College de Cambridge. Estudio durante algún tiempo la carrera de leyes con lo que trabajó de abogado durante 14 años, a la vez que publicaba un gran número de artículos. Luego pasó a ser profesor en Cambridge. Fue el primero que introdujo la multiplicación de las matrices. Es el autor del teorema de Cayley-Hamilton que dice que cualquier matriz cuadrada es solución de su polinomio característico. Dio la primera definición moderna de la noción de grupo. Recibió la Royal Medal en 1859 y la Medalla Copley en 1882. En combinatoria, su nombre está unido a la fórmula nn - 2 que enumera los árboles decorados con n picos. Se llama a veces octavas de Cayley o números de Cayley a los octoniones. Es el tercer matemático más prolifico de la historia, sobrepasado tan solo por Euler y Cauchy, con aportaciones a amplias áreas de la matemática. Cayley es autor de una colección de artículos suyos llamado Çollecterd Mathematica Papers of Cayley", que contiene 966 artículos en trece grandes volúmenes.

Ejemplo 3.3.2 *Comprobar la regla de la cadena para* $\boldsymbol{G}o\boldsymbol{F}$, *si* $\boldsymbol{F}(x,y) = [xseny, ysenx]$ *y* $\boldsymbol{G}(u,v) = [2u-3v, e^{u-v}, uv]$.

Hallamos primero la matriz jacobiana de $\boldsymbol{G}o\boldsymbol{F}$

$$\boldsymbol{G}o\boldsymbol{F}(x,y) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}\ (x,y)) = \boldsymbol{G}(\ xseny, ysenx) = [2xseny - 3ysenx, e^{xseny-ysenx}, xysenxseny]$$

$$J\boldsymbol{G}o\boldsymbol{F}(x,y) = \begin{bmatrix} 2seny - 3y\cos x & 2x\cos y - 3senx \\ (seny + y\cos x)e^{xseny-ysenx} & (x\cos y - senx)e^{xseny-ysenx} \\ ysenxseny + xy\cos xseny & xsenxseny + xysenx\cos y \end{bmatrix}$$

hallamos ahora las matrices jacobianas de $\boldsymbol{G}$ *y de* $\boldsymbol{F}$ *respectivamente*

$$J\boldsymbol{G}(u,v) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ e^{u-v} & -e^{u-v} \\ v & u \end{bmatrix}$$

$$J\boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}(x,y)) = J\boldsymbol{G}(xseny, ysenx) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ e^{xseny-ysenx} & -e^{xseny-ysenx} \\ ysenxv & xseny \end{bmatrix}$$

$$J\boldsymbol{F}(x,y) = \begin{bmatrix} seny & x\cos y \\ y\cos x & senx \end{bmatrix}$$

$$J\boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}(x,y)) \cdot J\boldsymbol{F}(x,y) =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ e^{xseny-ysenx} & -e^{xseny-ysenx} \\ ysenxv & xseny \end{bmatrix} \begin{bmatrix} seny & x\cos y \\ y\cos x & senx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2seny - 3y\cos x & 2x\cos y - 3senx \\ (seny + y\cos x)e^{xseny-ysenx} & (x\cos y - senx)e^{xseny-ysenx} \\ ysenxseny + xy\cos xseny & xsenxseny + xysenx\cos y \end{bmatrix}$$

Teorema 3.3.2 *Si* F *es un campo escalar de* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}$ *diferenciable en* $\boldsymbol{x} \in D$ *y si* $x_i = G_i(\boldsymbol{y})$ *son campos escalares de* $E_i \subseteq \mathbb{R}^m$ *en* $\mathbb{R}$ *que poseen deivadas parciales* $\dfrac{\partial G_i}{\partial y_j}$ *entonces* $\dfrac{\partial F}{\partial y_j} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial F}{\partial x_i}\dfrac{\partial G_i}{\partial y_j}$ *para* $j = 1, 2, ..., m$

Ejemplo 3.3.3 *Dados* $F(x,y) = senx\cos y$, $x = s^2t$ *y* $y = st^2$, *hallar* $\dfrac{\partial F}{\partial s}$ *y* $\dfrac{\partial F}{\partial t}$.

Aplicando la regla de la cadena

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = CosxCosy(2st) - SenxSeny(t^2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = CosxCosy(s^2) - SenxSeny(st)$$

Ejemplo 3.3.4 *Dado* $F(x,y) = x^2 + xy$. *supongamos que no sabemos* $x(u,v)$ *y* $y(u,v)$, *pero sabemos que* $x(1,2) = 3$, $y(1,3) = -2$, $\dfrac{\partial x}{\partial u}(1,2) = -1$, *y* $\dfrac{\partial y}{\partial u}(1,2) = 5$.*entonces podemos usar la regla de la cadena para calcular* $\dfrac{\partial f}{\partial u}(1,2)$.

Necesitaremos saber $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ *y* $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ *en el punto* $(x(1,2), y(1,2)) = (3,-2)$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(3,-2) = (2)(3) + (-2) = 4$$

$\dfrac{\partial F}{\partial y}(3,-2)=3$
Ahora empleamos la regla de la cadena:
$\dfrac{\partial F}{\partial u}=\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}$
$=(4)(-1)+(3)(5)=11$

Ejemplo 3.3.5 *Dado* $F(x,y)=f(x^2+y,3xy)$, *donde* f *es un campo escalar de* $\mathbb{R}^2$ *en* $\mathbb{R}$ *diferenciable. Si* $\nabla f(2,3)=[5,4]$ *hallar la dirección demayor crecimiento de* F *en* $(1,1)$.
La dirección de mayor crecimiento es la del gradiente unitario de F
Utiliando la regla de la cadena hallamos el gradiente de F
$\dfrac{\partial F}{\partial x}(1,1)=D_1f(2,3)2x+D_2f(2,3)3y=(5)2+(4)3=10+12=22$
$\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,1)=D_1f(2,3)1+D_2f(2,3)3x=(5)1+(4)3=17$
entonces $\nabla F(1,1)=[22,17]$
luego $\boldsymbol{v}=\dfrac{[22,17]}{\|[22,17]\|}$

Ejemplo 3.3.6 *En un triángulo rectangulo un cateto crece a razón de 2 cm/min y el otro cateto decrece a razón de 1 cm/min. Hallar la variación de la hipotenusa cuando los catetos miden 10 cm y 12 cm respectivamente.*
Consideremos el teorema de Pitagoras
$h^2=c_1^2+c_2^2$ *con* $c_1=10$, $c_2=12$ *entonces* $h=\sqrt{244}\approx 15{,}62$
Aplicando la regla de la cadena $2h\dfrac{\partial h}{\partial t}=2c_1\dfrac{\partial c_1}{\partial t}+2c_2\dfrac{\partial c_2}{\partial t}$ *con* $\dfrac{\partial c_1}{\partial t}=2$ *y* $\dfrac{\partial c_2}{\partial t}=-1$
entonces $\dfrac{\partial h}{\partial t}=\dfrac{1}{15{,}62}((10)(2)+(12)(-1))=0{,}51\ cm/\min$

Teorema 3.3.3 *Sean* F *es un campo escalar de* $D\subset\mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}$ *diferenciable en* $\boldsymbol{a}\in D$ *y* C *una curva de* $\mathbb{R}^n$ *parametrizada por medio de* α. *Si* $\alpha\prime(t)$ *existe y es diferente de cero para todo* t *de* I, *entonces* $F\prime(\boldsymbol{a};\mathbb{T}(t_0))$ *determina la derivada direccional de* F *a lo largo de* C *y es igual a* $F\prime(\boldsymbol{a};\mathbb{T}(t_0))=\nabla F(a)\cdot\mathbb{T}(t_0)$. *Nota:* $\alpha(t_0)=\boldsymbol{a}$

Ejemplo 3.3.7 *Hallar la derivada direccional de* $F(x,y)=2x^2y+3xy^2$ *a lo largo del circulo unitario en el punto* $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
Parametrizamos el circulo $x^2+y^2=1$ *de la siguiente manera*
$x=Cost$, $y=Sent$, $\alpha(t)=[Cost,Sent]$
luego $\alpha'(t)=[-Sent,Cost]$
$\alpha'(t)$ *es unitario, por lo tanto* $\alpha'(t)=T(t)$
para $t=-\dfrac{\pi}{4},\alpha(t)=p$ *y* $T\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

hallamos ahora el gradiente de F en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\nabla F(x,y) = [4xy + 3y^2, 2x^2 + 6xy]$

$\nabla F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left[-\frac{1}{2}, -2\right]$

luego $F'\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

$= \left[-\frac{1}{2}, -2\right] \cdot \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$

Ejercicios.sección 3.3.

1. Determine la matriz jacobiana de la función vectorial dada, en el punto p.

   a) $\boldsymbol{F}(x,y) = (Sen(x+y), xe^{x+y}, x+y)$, $p = (1,-1)$

   b) $\boldsymbol{F}(x,y) = \left[xy\ ,\ \frac{1}{x}\ ,\ \frac{y-x}{x+y}\right]$, $p = (1,1)$

   c) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = [x^y, y^z, z^x]$, $p = (1,1,1)$

2. Determinar un campo vectorial $\boldsymbol{G}$ de $D \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ cuya matriz jacobiana en $\boldsymbol{a} \in D$, sea la matriz dada. si $J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

   a) $J\boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 3c & 3d \end{pmatrix}$

   b) $J\boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} a+3c & b+3b \\ c-a & d-b \end{pmatrix}$

   c) $J\boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} 4a+5 & 4b-12 \\ a+c+3 & a+c-10 \end{pmatrix}$

3. Determine la matriz jacobiana del campo vectorial dado, en el origen, si f_1 y f_2 son campos escalares de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ diferenciables

   a) $\boldsymbol{F}(x,y) = (x + f_1(x,y), y + f_2(x,y))$

   b) $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(e^{f_1(x,y)}, e^{f_2(x,y)}\right)$

   c) $\boldsymbol{F}(x,y) = (f_1(x,y)f_2(x,y), xy)$

4. Comprobar la regla de la cadena para $\boldsymbol{FoG}$ si $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (xy, z)$ y $\boldsymbol{G}(u,v) = (u^2v, uv^2, 4u)$

5. Sea $\boldsymbol{F}(x\ ,y) = [e^{x+2y}, sen(y+2), 2x]$ y $\mathbf{G}(u,v,w) = [u+2v^2+3w^3, 2v-u^2]$

   a) Calcular las matrices jacobianas de $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{G}$
   b) Calcular la función compuesta $\boldsymbol{H}(u,v,,w) = \boldsymbol{F}(\mathbf{G}(u,v,w))$
   c) Calcular la matriz jacobiana de $\boldsymbol{H}$ en $(1,-1,1)$

6. Describa como son los campos vectoriales $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, cuya matriz jacobiana en todo punto $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ es una matriz diagonal.

7. Sea $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial tal que $\boldsymbol{F}(x) = \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que la matriz jacobiana de $\boldsymbol{F}$ en cualquier punto A es la matriz identica.

8. Utilice la regla de la cadena para hallar $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ si:

   a) $z = xe^y$, $x = st$, $y = \frac{s}{t}$
   b) $z = SenxCosy$, $x = (s+t)^2$, $y = (s-t)^2$
   c) $z = Tan(x+y)$, $x = \sqrt{st}$, $y = s^2t$

9. La siguiente tabla lista valores de una funcion $F(x,y)$ y sus derivadas parciales, dado $x(u,v) = uv$ y $y(u,v) = u+v^2$. Encuentre las siguientes derivadas parciales en los puntos indicados:

(x,y)	$F(x,y)$	$\dfrac{\partial F}{\partial x}$	$\dfrac{\partial F}{\partial y}$
$(1,1)$	-3	-2	2
$(1,2)$	5	1	1
$(2,1)$	2	0	7
$(2,5)$	-1	2	3
$(2,3)$	11	1	-1
$(3,2)$	2	1	0

   a) $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ en $(u,v) = (1,2)$
   b) $\dfrac{\partial F}{\partial v}$ en $(u,v) = (2,1)$

10. Hallar la derivada direccional de F a lo largo de la curva C en el punto P

   a) $F(x,y) = x^2 - y^2$, $C : y = e^x$, $P = (0,1)$
   b) $F(x,y) = e^{2x+3y}$, $C :\ x^2 + y^2 = 1$ $P = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
   c) $F(x,y,z) = (x+2y+3z)^2$, $C : \alpha(t) = (Cost, Sent, t)$, $P = (0,1,\pi/2)$

11. Suponga que F es un campo escalar y $C_1(y = x^2)$, $C_2(y = x^3)$ dos curvas tales que $F'((1,1);C_1) = \sqrt{5}$, $F'((1,1);C_2) = \sqrt{10}$, hallar la derivada direccional de F en $(1,1)$ a lo largo de la curva dada.

    a) $y = \sqrt{x}$

    b) $y = \dfrac{1}{x}$

    c) $y = 2^{x-1}$

12. En un cilindro circular recto el radio crece a razón de 3 cm/min y la altura crece a razón de 2 cm/min. Hallar la variación del volumen cuando el radio mide 8 cm y la altura 9 cm.

13. A que razón cambia el volumen de una caja rectangular cuando se incrementa su ancho de 6cm a una razón de 2 cm/min, se incrementa su longitud de 10 cm/min a una razón de 3 cm/min y decrece su altura de 8 cm a una razón de 1 cm/min.

14. El radio de un cono circular recto crece a razón de 5 cm/min y el volumen decrece a razón de 3 cm/min. Hallar la variación de la altura del cono cuando el radio mide 7 cm y el volumen es igual a 30 cm^3

15. Un automovil A viaja en dirección norte por una carretera a 120 Km/hora, otro automovil viaja en dirección oeste por una carretera a 90 km/hora, los automoviles se acercan al cruce de estas dos carreteras, a que razón cambia la distancia entre los dos autos cuando estan a 0.5 Km y 0.4 Km respectivamente del cruce.

16. Hallar la derivada direccional de $F(x, y, z) = e^{-x-2y-3z}$ en el punto $P = (0, 1, \sqrt{2})$ a lo largo de la curva intersección entre $x^2 + y^2 = z^2 - 1$, $y = 1$

    a) Parametrizando la curva intersección

    b) Sin parametrizar la curva intersección

17. Hallar los puntos (x, y) y las direcciones para que la derivada direccional de $F(x, y) = 3x^2 + y^2$ sea máxima , si está en el circulo unitario.

18. Utilizando un CAS construya una función para hallar la derivada direccional de un campo escalar a lo largo de una curva.

3.4. Funciones implicitas

Uno de los temas más importanes en la historia del cálculo es el teorema de la función implicita. En el capitulo anterior la gráfica de una función $y = \phi(x)$ se puede ver como una curva de nivel, correspondiente al nivel cero de un campo escalar $z = F(x, y)$, entonces el nivel cero esta constituido por el conjunto de puntos (x, y) tales que $F(x, y) = y - \phi(x) = 0$. El reciproco no siempre es cierto, hay casos donde no existe el nivel cero o donde no es posible despejar a y en terminos de x, por ejemplo si $F(x, y) = x^2 + y^2 + 2$ no existen puntos (x, y) tales que $x^2 + y^2 = -2$ y si consideramos el campo escalar $F(x, y) = ax^2 + by^2 - 1$, vemos que no podemos determinar una función $y = \phi(x)$, claramente se ve que $ax^2 + by^2 = 1$ define dos funciones $y = \dfrac{\sqrt{1 - ax^2}}{b}$ y $y = -\dfrac{\sqrt{1 - ax^2}}{b}$. Si es posible obtener de manera local una función $y = \phi(x)$ definida en una vecindad de a tal que $b = \phi(a)$, significa que dado un punto (a, b) del nivel cero de un campo escalar $z = F(x, y)$ existe una bola abierta de centro (a, b) que contiene la gráfica de $y = \phi(x)$. Cuando tal bola y tal función existen se dice que la función $y = \phi(x)$ esta definida implicitamente por $F(x, y) = 0$, se debe tener ademas que $F(x, y = \phi(x)) = 0$ para toda x del dominio de ϕ. El teorema de la función implicita[4] garantiza la existencia de $y = \phi(x)$ pero no dice como se halla.

Teorema 3.4.1 *Derivación implicita. Si F es un campo escalar de $D \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y sea $(a, b) \in D$ tal que $F(a, b) = 0$. Supongamos que F posee primeras derivadas parciales continuas en alguna bola B de centro (a, b) y que $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$. entonces $F(x, y) = 0$ se puede resolver para y en terminos de x y definir así una función $y = \phi(x)$ con dominio en una vecindad de a, tal que $b = \phi(a)$, la cual tiene derivadas continuas y $y' = \phi'(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)}$*

4



Gottfried Wilhelm von Leibniz (Leipzig, 1 de julio de 1646 - Hannover, 14 de noviembre de 1716) fue un filósofo, matemático, jurista y político alemán, nacido en Leipzig en julio de 1646. Fue uno de los grandes pensadores del siglo XVII y XVIII, y se le reconoce como el "último genio universal". Descubrió el cálculo infinitesimal, independientemente de Newton, y su notación es la que se emplea desde entonces. También descubrió el sistema binario, fundamento de virtualmente todas las arquitecturas de las computadoras actuales. Junto con René Descartes y Baruch Spinoza, es uno de los tres grandes racionalistas del siglo XVII. Su filosofía se enlaza también con la tradición escolástica y anticipa la lógica moderna y la filosofía analítica. Leibniz también hizo contribuciones a la tecnología, y anticipó nociones que aparecieron mucho más tarde en biología, medicina, geología, teoría de la probabilidad, psicología, ingeniería y ciencias de la información. Sus contribuciones a esta vasta lista de temas está desperdigada en diarios y en decenas de miles de cartas y manuscritos no publicados. Hasta el momento, no se ha realizado una edición completa de sus escritos, y por ello no es posible aún hacer un recuento integral de sus logros.

Teorema 3.4.2 *Derivación implicita generalizado. Si F es un campo escalar de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ y sea $\boldsymbol{a} \in D$ tal que $F(a) = 0$. Supongamos que F posee primeras derivadas parciales continuas en alguna bola B de centro a y que $\dfrac{\partial F}{\partial x_n}(a) \neq 0$. entonces $F(x) = 0$ se puede resolver para x_n en terminos de $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ y definir así una función $x_n = \phi(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ con dominio en una vecindad de a, la cual tiene derivadas continuas y*

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_{n-1})}{\dfrac{\partial F}{\partial x_n}(x_1, x_2, ..., x_{n-1})}$$ *(para todo $i = 1, 2, ..., n-1$).*

Ejemplo 3.4.1 *Verifique que el campo escalar $F(x, y) = 2xy + y - 4$ satisface las hipotesis del teorema de la función implicita en algún punto p del nivel cero de F.*

El nivel cero de F es $2xy + y = 4$ una curva en xy que no esta definida en $x = \dfrac{1}{2}$
hallamos ahora las derivadas parciales de F
$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2y$ *y* $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2x + 1$ *son continuas en $\mathbb{R}^2$*

la derivada del nivel cero $\dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)} = -\dfrac{2y}{2x + 1}$ *en forma implicita*

y en forma explicita el nivel cero es $y = \dfrac{4}{2x + 1}$

y su derivada es $y' = -\dfrac{8}{(2x + 1)^2}$ *la cual no existe en* $x = \dfrac{1}{2}$

Ejemplo 3.4.2 *La ecuación $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$ define implicitamente a z como función de x y y, hallar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$*

Consideremos a $F(x, y, z) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$
y apliquemos el teorema anterior

luego $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{z^2}} = -\dfrac{z^2}{x^2}$

y $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\dfrac{-\dfrac{1}{y^2}}{\dfrac{1}{z^2}} = -\dfrac{z^2}{y^2}$

Ejemplo 3.4.3 *La ecuación $F\left(xy, \sqrt{x^2 + z^2}\right) = 0$ define implicitamente una superficie S de $\mathbb{R}^3$, si $D_1F(1, 2) = 3$ y $D_2F(1, 2) = 2$, hallar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a S en $(1, 1, 3)$.*

Ejemplo 3.4.4 *Hallamos el gradiente de en F en* $(1,1,\sqrt{3})$

$\dfrac{\partial F}{\partial x}(1,1,\sqrt{3}) = D_1F(1,2)Y + D_2F(1,2)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} = (3)1 + (2)\frac{1}{2} = 3 + 1 = 4$

$\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,1,\sqrt{3}) = D_1F(1,2)X + D_2F(1,2)0 = (3)1 + 0 = 3$

$\dfrac{\partial F}{\partial Z}(1,1,\sqrt{3}) = D_1F(1,2)0 + D_2F(1,2)\dfrac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} = (3)0 + (2)\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Luego la ecuación del plano tangente a S en $\left(1,1,\sqrt{3}\right)$ *es*

$\left[4,3,\sqrt{3}\right]\left[x-1, y-1, z-\sqrt{3}\right] = 0$

$4x + 3y + \sqrt{3}z = 10$

y la ecuación de la recta normal a S en $\left(1,1,\sqrt{3}\right)$ *es*

$[x,y,z] = \left[1,1,\sqrt{3}\right] + t\left[4,3,\sqrt{3}\right]$

Si $\boldsymbol{F}$ es un campo vectorial de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ diferenciable para todo $\boldsymbol{a} \in D$, ademas $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) = [\boldsymbol{b}]$ y $J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) \neq \mathbf{0}$, entonces existe la función inversa del campo vectorial $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}^{-1}$ campo vectorial de $D^* \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ diferenciable en $\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{b}) \in D^*$ y $J\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{b}) = (J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}))^{-1}$. $(\boldsymbol{F}^{-1} o \boldsymbol{F})(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} \in D$ y $(\boldsymbol{F} o \boldsymbol{F}^{-1})(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \in U^*$

Ejemplo 3.4.5 *Hallar la inversa del campo vectorial* $\boldsymbol{F}(x,y) = [5x, 3y]$

Hallamos la matriz jacobiana de $\boldsymbol{F}$

$J\boldsymbol{F}(x,y) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

y $\det\left(J\boldsymbol{F}(x,y)\right) = 15$

luego $(J\boldsymbol{F}(x,y))^{-1} = \dfrac{1}{15}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

entonces $F^{-1}(x,y) = \left[\dfrac{x}{3}, \dfrac{y}{5}\right]$

Ejercicios sección 3.4..

1. Verifique que el campo escalar dado satisface las hipotesis del teorema de la función implicita en algun punto p del nivel cero de F y halle la derivada de la función $y = f(x)$ determinada por el nivel cero.

   a) $F(x,y) = 4x + 5y - 6$

   b) $F(x,y) = x^2 + 3y^2 + 1$

   c) $F(x,y) = e^x + e^y - 10$

2. La ecuación dada define implicitamente a z como función de x y y . Hallar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

   a) $xy + yz + zx = 5$
   b) $Cos(x + y) + Cos(y + z) = 1$
   c) $e^{x+y+z} = xyz$

3. Para las ecuaciones del numeral anterior halle $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

4. Suponga que $F(x, y) = f(2x + 3y, x - y)$ donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es un campo escalar diferenciable tal que $\nabla f(7, 1) = [3, 4]$.hallar.

   a) Gradiente de F en $(2, 1)$
   b) Derivada direccional de F en $(2, 1)$ en dirección $[1, 1]$
   c) Dirección de mayor crecimiento de F en $(2, 1)$

5. Para el campo escalar del numeral anterios encuentre: Suponga que

   a) Ecuación del plano tangente a F en $(2, 1)$. Si $F(2, 1) = 3$
   b) Ecuación de la recta normal a F en $(2, 1)$. Si $F(2, 1) = 3$

6. Sea $w = F(x - y, y - z, z - x)$ demuestre que $\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$

7. Las dos ecuaciones $x + y = uv$ y $xy = u - v$ definen a x y y como funciones implícitas de u y v. Halle las primeras derivadas parciales de x y y en función de u y v.

8. Si $z = y + F(x, y)$ y F es diferenciable, demuestre que $y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = x$

9. Hallar la función inversa del campo vectorial

   a) $\boldsymbol{F}(x, y) = (x + 2y, 2x - y)$
   b) $\boldsymbol{F}(x, y) = (Cos(x + y), Sen(x - y))$
   c) $\boldsymbol{F}(x, y) = (e^x Cosy, e^x Seny)$

10. Utilizando un CAS construya una funciòn que permita hallar la inversa de un campo vectorial.

3.5. Máximos y mínimos

En esta sección se considerarán máximos y minimos de campos escalares, su estudio es similar al considerado para funciones de variable real y valor real y tambien se considera la función de Taylor para determinar condiciones suficienes para que un campo escalar tenga extremo local en un punto.

Si F es un campo escalar de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ y $\boldsymbol{a} \in D$, entonces:

(i) F posee un máximo relativo o local en $\boldsymbol{a}$ si existe una bola $B_\delta(\boldsymbol{a}) \subset D$ tal que $F(\boldsymbol{x}) \leq F(\boldsymbol{a}) \;\; \forall \boldsymbol{x} \in B_\delta(\boldsymbol{a})$

(ii) F posee un mínimo relativo o local en $\boldsymbol{a}$ si existe una bola $B_\delta(\boldsymbol{a}) \subset D$ tal que $F(\boldsymbol{x}) \geq F(\boldsymbol{a}) \;\; \forall \boldsymbol{x} \in B_\delta(\boldsymbol{a})$

Ejemplo 3.5.1 *Demostrar que el origen es un punto critico del campo escalar* $F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ *y es un mínimo.*

Utilizando el rango del campo escalar
$R = \{z \in \mathbb{R}; z \geq 0\}$
vemos que para $(0,0)$ *la imagen es cero*
y no existe ninguna pareja (x,y) *cuya imagen sea menor que cero*

Si F es un campo escalar de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ y diferenciable en $\boldsymbol{a} \in D$ y ademas $\nabla F(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$, entonces $\boldsymbol{a}$ es un punto critico o estacionario de F.

Si $\boldsymbol{a}$ es punto critico y $\boldsymbol{a}$ no es ni máximo ni mínimo entonces $\boldsymbol{a}$ es llamado punto de silla.

Ejemplo 3.5.2 *Hallar los puntos criticos de* $F(x,y) = x^2+y^2+4x-6y$

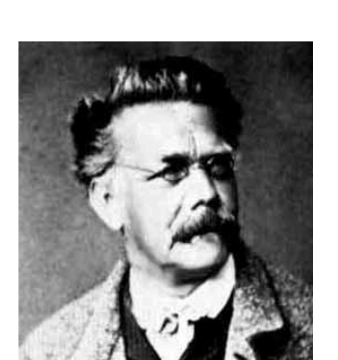
Hallamos el gradiente de F
$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2x+4$ *y* $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2y-6$
igualamos a $(0,0)$
$2x+4=0,\ 2y-6=0$ *entonces* $x=-2$ *y* $y=3$
puesto que $(x+2)^2 \geq 0$ *y* $(y-3)^2 \geq 0$ *, se tiene que* $F(x,y) \geq 13$
por lo tanto $F(-2,3) = 13$ *es un mínimo local,*
y de hecho es el mínimo absoluto de F.

Si F es un campo escalar de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ diferenciable en $\boldsymbol{a} \in D$ y ademas $\boldsymbol{a}$ es un punto critico de F entonces a la matriz cuadrada de orden n $H(a) = \left[\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a})\right]$

se denominara matriz hessiana[5] de F en $\boldsymbol{a}$ o hessiano de F en $\boldsymbol{a}$

---

[5]



Teorema 3.5.1 *de Taylor de segundo orden para campos escalares. Sea F un campo escalar de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, tal que las derivadas parciales de segundo orden* $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ *son continuas en alguna bola $B_\delta(\boldsymbol{a}) \in D$.entonces para todo $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x} \in B$, se tiene la fórmula de Taylor de segundo orden para F en $\boldsymbol{a}$,*

$F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{a}) + \nabla F(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}H(\boldsymbol{a}+\in \boldsymbol{x})\boldsymbol{x}^t$ *donde* $0 <\in< 1$

la cual se puede escribir tambien como

$F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{a}) + \nabla F(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}H(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x}^t + r(\boldsymbol{x})$ *en donde el residuo $r(\boldsymbol{x})$ tiene la propiedad* $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} \dfrac{r(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|} = 0$

Ejemplo 3.5.3 *Encontrar la fórmula de Taylor de segundo orden para $F(x,y) = ysenx$ alrededor del origen.*

$F(0,0) = 0$

$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = y\cos x,\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = senx$

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = -ysenx,\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = \cos x,\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = 0$

$\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 0,\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0,\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) = 0,\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0,0) = 1,\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(0,0) = 0$

entonces $F(x,y) = F(0,0) + \nabla F(0,0)\,[x,y] + \dfrac{1}{2}\,[x,y]\,H(0,0)\,[x,y]^t + r([x,y])$

luego $F(x,y) = \dfrac{1}{2}\,[x,y]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}[x,y]^t + r([x,y]) = xy + r([x,y])$

Si $\boldsymbol{a}$ es un punto critico de un campo escalar F entonces la fórmula de Taylor toma la forma $F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{a}) = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{x}H(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x}^t + r(\boldsymbol{x})$, puesto que $r(\boldsymbol{x})$ tiende a cero, entonces el signo de $F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{a})$ es el mismo signo de la forma cuadrática $\boldsymbol{x}H(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x}^t$, por lo tanto la naturaleza del punto critico la determina el signo de la forma cuadrática.

El hessiano, conocido también como discriminante o matriz hessiana, fue introducido en el año de 1844 por Hesse, matemático alemán quien nació en 1811 y murió en 1874. Esto sucedió luego de que Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) introdujera "los jacobianos". Lo que hizo Jacobi con esto fue expresar los cambios de variable de las integrales múltiples en términos de estos. Respecto a los detalles biográficos de Ludwig Otto Hess se sabe que nació precisamente en Konigsberg, Alemania (aunque actualmente es Rusia) el 22 de abril de 1811. Estudió con Jacobi en su ciudad natal (Konigsberg), donde se desempeñó primero como maestro de física y química y posteriormente como profesor. En 1856 se trasladó a Heidelberg, donde permaneció doce años, antes de tomar un puesto en Munich, donde falleció el 4 de agosto de 1874. Ludwig Otto Hess se hizo tan famoso por una matriz que introdujo en un artículo de 1842 referido a curvas cúbicas y cuadráticas.

Propiedad 3.5.1 *Condiciones suficientes para la existencia de extremos locales. Sea F un campo escalar de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ diferenciable en $\boldsymbol{a} \in D$ y ademas $\boldsymbol{a}$ es punto critico de F entonces :*

(i) Si la forma cuadratica $Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}H(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x}^t$ es definida positiva,entonces F tiene un mínimo local en $\boldsymbol{a}$.

(ii) Si la forma cuadratica $Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}H(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x}^t$ es definida negativa,entonces F tiene un máximo local en $\boldsymbol{a}$.

Propiedad 3.5.2 *Criterio para la determinación de extremos locales en campos escalares de $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ en $\mathbb{R}$. Sea F un campo escalar de $D \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y ademas $\boldsymbol{a}$ es un punto critico de F entonces :*

(i) F posee un máximo en $\boldsymbol{a}$ si $|\triangle H(\boldsymbol{a})| > 0$ y $D_{11}F(\boldsymbol{a}) < 0$
(ii) F posee un mínimo en $\boldsymbol{a}$ si $|\triangle H(\boldsymbol{a})| > 0$ y $D_{11}F(\boldsymbol{a}) > 0$
(iii) F posee un punto de silla en $\boldsymbol{a}$ si $|\triangle H(\boldsymbol{a})| < 0$
(iv) el criterio no decide si $|\triangle H(\boldsymbol{a})| = 0$

Ejemplo 3.5.4 *Encontrar e identificar los puntos criticos del campo escalar $F(x,y) = y^3 + 3x^2y - 3x^2 - 3y^2 + 2$*

Calculamos primero el gradiente de F
$\nabla F(x,y) = [6xy - 6x, 3y^2 + 3x^2 - 6y]$
lo igualamos al vector cero, entonces
$6x(y-1) = 0$ *tenemos que* $x = 0$ *o* $y = 1$
reemplazando en la segunda ecuación
para $x = 0$, $3y^2 - 6y = 3y(y-1) = 0$,
tenemos que $y = 0$ *o* $y = 1$
para $y = 1$, $3 + 3x^2 - 6 = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1) = 0$
tenemos que $x = 1$ *o* $x = -1$
por lo tanto los puntos criticos son $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ *y* $(-1,1)$
hallamos ahora la matriz hessiana de $F(x,y)$

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 6y-6 & 6x \\ 6x & 6y-6 \end{bmatrix}$$

cuyo determinante es $|H(x,y)| = (6y-6)^2 - 36x^2$
clasificamos cada punto critico con el determinante
$|H(0,0)| = 36$ *y* $D_{11}F(0,0) = -6 < 0$ *entonces* $(0,0,F(0,0))$ *es máximo*
$|H(0,2)| = 36$ *y* $D_{11}F(0,2) = 6 > 0$ *entonces* $(0,2,F(0,2))$ *es mínimo*
$|H(1,1)| = -36$ *entonces* $(1,1,F(1,1))$ *es punto de silla*
$|H(-1,1)| = -36$ *entonces* $(-1,1,F(-1,1))$ *es punto de silla*

Hay casos donde el criterio no decide o el campo escalar posee infintos criticos.

Ejemplo 3.5.5 *Encontrar e identificar los puntos criticos del campo escalar $F(x,y) = x^2y^2$*

calculando el gradiente de F

$\nabla F(x,y) = [2xy^2, 2x^2y]$
que es igual a $(0,0)$ *en* $x = 0$ *o* $y = 0$
posee infinitos criticos todos los puntos de los ejes x*,* y
la matriz hessiana es igual a $H(x,y) = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{bmatrix}$

cuyo determinante es $|H(x,y)| = 4x^2y^2 - 16x^2y^2 = -12x^2y^2$
el critico $(0,0)$ *no se puede clasificar*
pero utilizando el rango se puede ver que F *posee alli un mínimo*

Ejemplo 3.5.6 *Encontrar e identificar los puntos criticos del campo escalar* $F(x,y) = senx + \cos y$ *en la región acotada por* $0 < x < \pi$*;* $-1 < y < 4$
calculando el gradiente de F
$\nabla F(x,y) = [\cos x, -seny]$
que es igual a $(0,0)$ *en* $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$*,* $y = n\pi$ *(*$n \in \mathbb{Z}$*)*
posee infinitos criticos si no se acota su dominio
luego en la región dada los criticos son
$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
la matriz hessiana es igual a $H(x,y) = \begin{bmatrix} -senx & 0 \\ 0 & -\cos y \end{bmatrix}$
cuyo determinante es $(|H(x,y)| =)\, senx \cos y$
clasificamos cada punto critico con el determinante
$\left|H\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)\right| = -1$ *y* $D_{11}F\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = -1 < 0$*, entonces* $\left(\frac{\pi}{2}, 0, F\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)\right)$ *es máximo*
$\left|H\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)\right| = 1$ *y* $D_{11}F\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 1 > 0$*, entonces* $\left(\frac{\pi}{2}, 0, F\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)\right)$ *es mínimo*

Para encontrar los valores máximos y mínimos absolutos de un campo escalar F en una región cerrada y acotada D.

1. Determinar los criticos de F en el interior de D y clasificarlos con el criterio del hessiano.

2. Determinar los criticos de F en la frontera de D y clasificarlos utilizando criterios de una variable.

3. Determinar los máximos y mínimos absolutos.

Ejemplo 3.5.7 *Determinar los máximos y mínimos absolutos de* $F(x;y) = x^2 - y^2$ *en la región triangular de vértices* $(0,0)$*,* $(2,0)$ *y* $(0,2)$*.*
Primero hallamos el gradiente de F
$\nabla F(x,y) = [2x, 2y]$*, que se anula en* $(0,0)$
este punto no es interior es frontera
en el lado $x = 0$*,* $F(0,y) = -y^2$*, está función tiene mínimo en* $(0,0)$

en el lado $y = 2 - x$, $F(x; 2 - x) = 0$, *está función no tiene criticos*
y en el lado $y = 0$, $F(x, 0) = x^2$, *está función tiene máximo en* $(2, 0)$
por lo tanto el máximo absoluto ocurre en $(2, 0)$
y el mínimo absoluto ocurre en $(0, 2)$

Ejercicios sección 3.5.

1. Demostrar que el origen es un punto critico del campo escalar dado, y es un mínimo.

   a) $F(x,y) = |x| + |y|$
   b) $F(x,y) = x^{2/3} + y^{2/3}$
   c) $F(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

2. Demostrar que los campos escalares no tienen extremos locales.

   a) $F(x,y) = x^3 + 5x + y^3 + 2y$
   b) $F(x,y,z) = ArcTan(x + 2y + 3z)$
   c) $F(x,y,z) = Ln(x + 2y + 3z)$

3. Encuentre la formula de Taylor del campo escalar F en el origen

   a) $F(x,y) = sen(2x + y)$
   b) $F(x,y) = e^{2x+3y}$
   c) $F(x,y) = \dfrac{1}{1 + x + y}$

4. Determinar si con la información dada se puede decir si F posee un máximo, o un mínimo, o un punto de silla en (x_0, y_0)

   a) $F_{xx}(x_0, y_0) = 9 \quad F_{yy}(x_0, y_0) = 4 \quad F_{xy}(x_0, y_0) = 6$
   b) $F_{xx}(x_0, y_0) = -3 \quad F_{yy}(x_0, y_0) = -8 \quad F_{xy}(x_0, y_0) = 2$

5. A parir de las curvas de nivel del campo escalar F

   a) $F(x,y) = x^2 + xy + y^2$
   b) $F(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$
   c) $F(x,y) = x^4 - x^2 + 2x + y^4 - y^2$

6. Para el campo escalar dado encontrar e identificar los puntos criticos del campo escalar dado.

   a) $F(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$
   b) $F(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 1$
   c) $F(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 5$
   d) $F(x,y) = x^3 + y^3 + 3y^2 - 3x - 9y + 2$

7. Demuestre que el campo escalar F tiene un número in. . . nto de criticos y que el criterio del hessiano no decide.

   a) $F(x, y) = x^2y^2$
   b) $F(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 2$
   c) $F(x, y) = (x - 1)^2(y + 4)^2$

8. Para el campo escalar dado encontrar e identificar los puntos criticos.

   a) $F(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ en la región triangular de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(2, 0)$
   b) $F(x, y) = x^3 + 2xy^2$ en la región $D = \{(x, y)|0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 3\}$
   c) $F(x, y) = 2x^2y + 3xy^3$ en la región acotada por $x^2 + y^2 \leq 1$

9. La base de un acuario de volumen V es metalica y los lados son de vidrio. El costo por unidad de área de la base es el doble de la unidadt de área de vidrio, determine las dimensiones que minimizan el costo del material utilizado.

10. Una caja rectangular sin tapa se debe construir con 60 cm^2 de cartón. Determine el volumen máximo de la caja.

11. Encuentre las dimensiones de una caja cuyo volumen es 1000 cm^3 que tenga la mínima área superficial.

12. Muestre que $(0, 0)$ es un punto critico de $F(x, y) = x^2 + kxy + y^2$ sin importar el valor de k

13. Determine los valores de k para que el campo escalar $F(x, y) = x^2 + kxy + y^2$ posea en $(0, 0)$

    a) Un mínimo
    b) Un máximo
    c) Un punto de silla

14. Sea $F(x, y) = ax^2 - by^2$ donde a, $b \in \mathbb{R}$. Determine los valores de a y b de modo que F tenga en el punto $(0, 0)$ un:

    a) Máximo
    b) Mínimo
    c) Punto de silla

15. Utilizando un CAS construya una función que permita clasificar los puntos criticos de un campo escalar dado.

3.6. Multiplicadores de Lagrange

A diferencia de la sección anterior donde se considerarón métodos para hallar los extremos de un campo escalar en su dominio, ahora consideraremos métodos para encontrar

los extremos de un campo escalar sujeto a unas restricciones. Supongamos que queremos encontrar los extremos de un campo escalar $z = F(x, y)$ cuando sus variables x, y varían en un conjunto determinado de puntos del plano, que podría ser una curva. Sean F y G campos escalares de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$,diferenciables, supongamos que F cuando está restringuida a la curva de nivel C determinada por $G(x, y) = c$ tiene un puno critico en (a, b) y que $\nabla G(a, b) \neq (0, 0)$ entonces existira un número real λ tal que $\nabla F(a, b) = \lambda \nabla G(a, b)$, si $\lambda \neq 0$ significa que las curvas de nivel de $F(x, y)$ y $G(x, y)$ que pasan por (a, b) tienen la misma tangente en (a, b), es decir los vectores $\nabla F(a, b)$ y $\nabla G(a, b)$ son paralelos, y para cierto valor de λ son colineales sobre la curva de nivel. Para encontrar un máximo o un mínimo de F resolvemos el sistema $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \lambda \dfrac{\partial G}{\partial x}(x, y)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \lambda \dfrac{\partial G}{\partial y}(x, y)$ y $G(x, y) = c$

Ejemplo 3.6.1 *Para una elipse de centro* $(3, 0)$ *y semiejes de longitudes 1 y 2 (x, y respectivamente), encontrar los puntos de la elipse más cercanos y más alejados del origen.*

La elipse tiene por ecuación $(x - 3)^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$
para un punto (x, y) *la distancia al origen está dada por* $\sqrt{x^2 + y^2}$
por comodidad utilizamos como función la distancia al cuádrado
$F(x, y) = x^2 + y^2$
la restricción es la elipse, o sea
$G(x, y) = (x - 3)^2 + \dfrac{y^2}{4} - 1$
considerando $\nabla F(x, y) = \lambda \nabla G(x, y)$
obtenemos $[2x, 2y] = \lambda \left[2x - 6, \dfrac{y}{2}\right]$
luego $2x = \lambda (2x - 6)$ *y* $2y = \lambda \dfrac{y}{2}$
entonces $y = 0$ *o* $\lambda = 4$
criticos $(4, 0)$ *y* $(2, 0)$
por lo tanto la distancia al origen es
$d(4, 0) = 4$ *y* $d(2, 0) = 2$
está más cerca del origen $(2, 0)$
y está mas lejos del origen $(4, 0)$

Hay casos donde el critico es uno solo o varios pero con la misma imagen, su clasificación se realiza tomando otro punto de la restricción y comparando las imagenes en la función a optimizar. Ademas no todos los problemas son de caracter geometríco.

Ejemplo 3.6.2 *Optimizar el producto de dos numéros cuya suma sea igual a 10*
La función es $F(x,y) = xy$
la restricción es $G(x,y) = x + y - 10$
considerando $\nabla F(x,y) = \lambda \nabla G(x,y)$
obtenemos $[y,x] = \lambda[1;1]$
luego $2x = 10$, $x = 5$
critico $(5,5)$, $F(5,5) = 25$
para saber si es máximo o mínimo
tomemos otro punto de la restricción
$(10,0)$ *con* $F(10,0) = 0$
por lo tanto el producto en $(5,5)$ *es máximo*

Supongamos que queremos obtener los extremos del campo escalar F cuando (x,y,z) varía en una superficie S determinada por un campo escalar G, se reduce a hallar los

extremos de una campo escalar con una restricción. La expresión $G(x,y,z) = 0$ es una superficie de nivel (cero) de G y $\nabla G(a,b,c)$ es normal a la supeficie S en (a,b,c), entonces

los vectores $\nabla F(a,b,c)$ y $\nabla G(a,b,c)$ son linealmente dependientes, entonces existe una constante λ tal que $\nabla F(a,b,c) = \lambda \nabla G(a,b,c)$.

Ejemplo 3.6.3 *Hallar la distancia más corta del punto* $(4,0,0)$ *al cono* $z = \sqrt{x^2+y^2}$
Utilizando multiplicadores de Lagrange
minimizamos la distancia del punto $(4,0,0)$ *al cono*
$D((x,y,z),(4,0,0)) = \sqrt{(x-4)^2 + y^2 + z^2}$
por comodidad tomamos la distancia al cuadrado
$F(x,y,z) = (x-4)^2 + y^2 + z^2$ *restringuida a el cono*
$G(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} - z$
entonces $(2(x-4), 2y, 2z) = \lambda \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1 \right)$
luego $\lambda = -2z = -2\sqrt{x^2+y^2}$
por lo tanto $2(x-4) = -4x$, $x = \dfrac{4}{3}$
$2y = -4y$, $y = 0$
$z = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 0} = \frac{4}{3}$
luego la distancia mínima es
$D\left(\left(\dfrac{4}{3}, 0, \dfrac{4}{3}\right), (0,0,0)\right) = \dfrac{4\sqrt{5}}{3}$

Supongamos que queremos obtener los extremos del campo escalar F cuando (x,y,z) varía en la curva C intersección entre las superficies G_1 y G_2, se reduce a hallar los extremos de una campo escalar con dos restricciones. Las expresiones $G_1(x,y,z) = 0$ y $G_2(x,y,z) = 0$ son superficies de nivel (cero) de G_1 y G_2, y $\nabla G_1(a,b,c)$ y $\nabla G_2(a,b,c)$ son normales a la curva C en (a,b,c), entonces los vectores $\nabla F(a,b,c)$, $\nabla G_1(a,b,c)$ y

$\nabla G_2(a,b,c)$ se encuentran en el mismo plano (normal a C en (a,b,c)), luego son linealmente dependientes,entonces existen constantes λ_1 y λ_2 tales que $\nabla F(a,b,c) = \lambda_1 \nabla G_1(a,b,c) + \lambda_2 \nabla G_2(a,b,c)$

Propiedad 3.6.1 *Multiplicadores de Lagrange (Máximos y minimos condicionados o Maximizadores de Lagrange). Si F es un campo escalar de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ sujeto a lo más a n-1 condiciones G_i campos escalares de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, entonces los máximos y/o mínimos de F sujeto a G_i estan en la solución del sistema*

$G_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ $(\forall i = 1, 2, ..., n)$

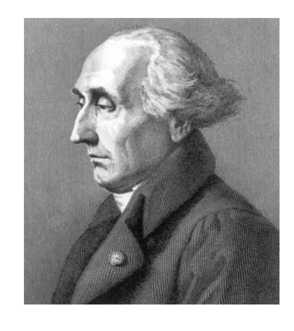
$\nabla F(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla G_i(x_1, x_2, ..., x_n)$. λ_i *es llamado multiplicador de Lagrange* [6] *($\lambda_i \in \mathbb{R}$)*

Ejemplo 3.6.4 *Hallar el volumen del máximo paralelepipedo rectangular con tres aristas sobre los ejes positivos y uno de sus vértices en el plano $2x + 3y + 6z = 12$*

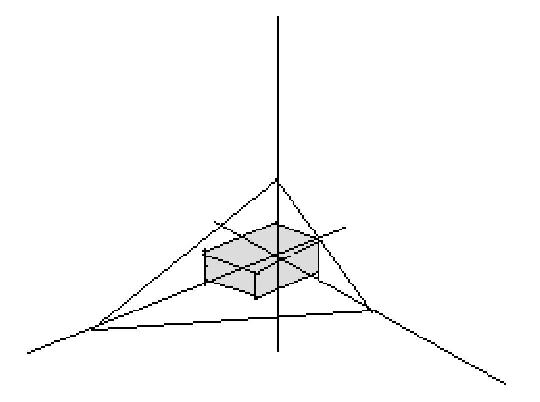
Consideremos las dimensiones del paralelepipedo como x, y, z
luego $V(x,y,z) = xyz$ es la función a maximizar
la restricción es el plano $2x + 3y + 6z = 12$
luego $G(x;y;z) = 2x + 3y + 6z - 12$
considerando $\nabla F(x,y,z) = \lambda \nabla G(x,y,z)$
obtenemos $[yz, xz, xy] = \lambda[2,3,6]$
$yz = 2\lambda$, $xz = 3\lambda$ *y* $xy = 6\lambda$
igualando 1 y 2 obtenemos $x = \frac{3}{2}y$
igualando 2 y 3 obtenemos $z = \frac{1}{2}y$
reemplazando en la restricción
$y = \frac{4}{3}$, $x = 2$ *y* $z = \frac{2}{3}$
por lo tanto $V = \frac{16}{9}\ u^3$

---

[6]



Joseph Louis Lagrange (bautizado como Giuseppe Lodovico Lagrangia) (25 de enero de 1736 en Turín - 10 de abril de 1813) fue un matemático, físico y astrónomo, procedía de una ilustre familia parisiense, que tenía profundo arraigo en Cerdeña, y algún rastro de noble linaje italiano. A los diecinueve años de edad, obtuvo fama resolviendo el así llamado problema isoperimétrico, que había desconcertado al mundo matemático durante medio siglo. Comunicó su demostración en una carta a Euler, el cual se interesó enormemente por la solución, de modo especial en cuanto concordaba con un resultado que él mismo había hallado.En realidad Lagrange no sólo había resuelto un problema, también había inventado un nuevo método, un nuevo cálculo de variaciones, que sería el tema central de la obra de su vida. Siguió residiendo en Prusia durante veinte años, produciendo obras de alta distinción, que culminaron en su Mécanique Analytique. Decidió publicarla en Francia, a donde fue llevada a salvo por uno de sus amigos.



Ejercicios sección 3.6.

1. Determinar los puntos máximos y/o mínimos del campo escalar dado con la restricción indicada.

   a) $F(x,y) = 25 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 = 4y$
   b) $F(x,y) = xy$, $9x^2 + y^2 = 4$
   c) $F(x,y) = x^2 - y^2$, $-x + 2y = 6$

2. Determinar los puntos máximos y/o mínimos del campo escalar dado con la restricción indicada.

   a) $F(x,y,z) = x + y + z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
   b) $F(x,y,z) = x^2y^2z^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
   c) $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $+2y + 3z = 6$ y $x - y - z = -1$

3. Determinar los puntos máximos y/o mínimos del campo escalar dado con la restricción indicada.

   a) $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $x + 2y + 3z = 6$ y $x + y + z = 1$
   b) $F(x,y,z) = xyz$, $x + y + z = 4$ y $x - y - z = 3$
   c) $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$, $x + y + 2z = 1$, $2x - z + w = 2$ y $y + 3z + 2w = -1$

4. Determine los puntos más cercanos y más alejados del origen de:

   a) $x^2 + y^2 + xy = 4$
   b) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$
   c) $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16$

5. Hallar el punto del paraboloide $z = x^2 + y^2$ más proximo al punto $p = (3,6,4)$.

6. Hallar los puntos de la curva intersección entre las superficies x2 [redacted] xy + y2 = 1 y x2 + y2 = 1 que estan m as cerca del origen.

7. Determinar las dimensiones de una lata cilindrica de volumen 1000 cm^3 , cuya area superficial sea mínima.

8. Determinar las dimensiones de la caja rectangular de volumen máximo que puede ser inscrita en elelipsoide x2a2 +y2b2 +z2c2 = 1

9. Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto (a, b, c) del primer octante y que forma un tetraedro con los planos coordenados, de volumen máximo

10. La ganancia que obtiene un comerciante por la venta de tres productos diferentes x, y y z , de precios U$2, U$1 y U$5 respectivamente es $G(x, y, z) = x^{1/2}y^{1/3}z^{1/6}$. Determinar cuantas cántidades debe comprar de cada producto para maximizar su ganancia si dispone de U$120.

11. Un alumna de economía de la PUJ tiene $60.000 para invertir en galletas y chocolatinas, las galletas cuestan $200 la unidad y las chocolatinas $300 la unidad. Suponga que la utilidad obtenida por la venta de x galletas y y chocolatinas esta dada por la función de utilidad de Cobb-Douglas $U(x, y) = 10x^{0,6}y^{0,4}$. ¿Cuántas unidades de galletas y chocolatinas debería comprar la alumna para maximizar la utilidad?

12. Carrefour desea colocar una bodega para abastecer a tres de sus supermercados. El primer supermercado (Hayuelos) se sitúa a 8 Km. al oeste del segundo supermercado (Av.19) y este a 6 Km. al norte del tercer supermercado (20 de julio). Los analistas de costos de Carrefour han calculado que sus costos de transporte son proporcionales al cuadrado de la distancia entre la bodega y los supermercados. Si el segundo supermercado se localiza en el origen del sistema de coordenadas, determinar en que lugar se debe construir la bodega de abastecimiento a fin de minimizar los costos de transporte.

13. Maximizar $F(x_1,x_2, ..., x_n) = x_1x_2...x_n$ sujeto a $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1$

14. Maximizar $F(x_1,x_2, ..., x_n) = x_1 + x_2 + ... + x_n$ sujeto a $\prod\limits_{i=1}^{m} x_i = 1$

15. Utilizando un CAS interpretar geometricamente un campo escalar restringido.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPITULO 3

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso, justificando su respuesta.

1. Si las derivadas parciales mixtas de un campo escalar F en un punto son iguales, el campo es diferenciable en el punto.
2. Si una función de varias variables posee todas las derivadas en un punto, entonces es diferenciable.
3. El gradiente de un campo escalar en un punto P, es un vector anclado en P-
4. Si el gradiente de un campo escalar F y un vector $\boldsymbol{v}$ tienen igual dirección y sentido, la derivada direccional del campo escalar F en dirección $\boldsymbol{v}$ es máxima.
5. El plano tangente a una superficie solo hace contacto con la superficie en un punto
6. Para hallar la derivada direccional de un campo escalar a lo largo de una curva hay que parametrizar la curva.
7. Es posible hallar la inversa de un campo escalar.
8. Si el gradiente de un campo escalar en un punto se anula, el punto es critico
9. Si el determinante de la matriz Hessiana de un campo escalar es igual a cero, el campo escalar no posee puntos criticos
10. En multiplicadores de Lagrange un campo escalar F de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ posee n-1 restricciones.

PREGUNTAS DE SELECCIÓN MULTIPLE CON UNICA RESPUESTA

1. La resistencia R de un alambre es proporcional a su longitud e inversamente proporcional al cudrádo del radio, es decir $R = k\dfrac{1}{r^2}$ Si el error relativo en la medición de la longitud es 5 % y el error relativo en la medición del radio es 10 %, entonces el error relativo en la medición de R en el peor de los casos es:

   A. 0;95 % B. 0;25 % C. 25 % D. 50 %

2. La diferencial de la función $F(t,\theta) = e^t sen\theta$ es igual a:

   A. $du = e^t sen\theta dt + e^t \cos\theta d\theta$ B. $du = e^t sen\theta \triangle t + e^t \cos\theta \triangle\theta$

   C. $\triangle u = e^t sen\theta \triangle t + e^t \cos\theta \triangle\theta$ D. $\triangle u = e^t sen\theta \triangle\theta + e^t \cos\triangle\theta + \epsilon_1 \triangle t + \epsilon_2 \triangle\theta$

3. El radio de un cono circular recto aumenta a razón de $1,8$ pulg/seg mientras que su altura disminuye a razón de $2,5$ pul/seg. La razón de cambio a la que cambia el volumen del cono cuando el radio es 120 pulg y la altura es 140 pulg es igual a:

   A. 8160π B. 40π C. 8000π D. 3200π

4. La máxima razón de cambio de $F(x;y) = ln(x^2 + y^2)$ en $(1,2)$ es:

   A. $ln5$ B. 5 C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

5. El vector tangente a la curva intersección entre el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el elipsoide $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ en el punto $(1,1,2)$ es igual a:

   A. $[2,2,-1]$ B. $[8,2,4]$ C. $[10,16,12]$ D. $[10,-16,-12]$

6. La ecuación $xz + yz = 1$ define implicitamente a z como una función de x y y, entonces es correcto afirmar que:

   A. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{z}{(x+y)^2}$ B. $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{z}{(x+y)^2}$

   C. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2z}{(x+y)^2}$ D. $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{z - xz - yz}{(x+y)^3}$

7. Para que valor de k el campo escalar $F(x;y) = y^3 + 3x^2y - kx^2 - ky^2 + 2$ posee un máximo en $(0,0)$, un mínimo en $(0,2)$ y un punto de silla en $(1,0)$.

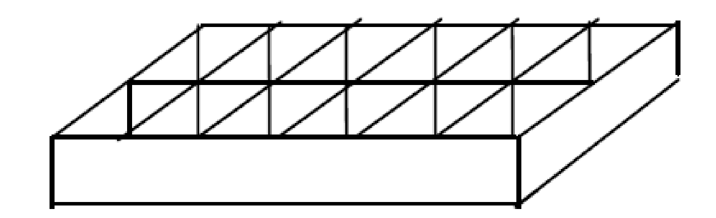
   A. $k > 0$ B. $k < 6$ C. $-3 < k < 3$ D. $0 < k < 3$

8. El campo escalar $F(x,y) = x^22 + 3y^22 + 2xy + ax + by + c$ tiene un valor mínimo local de 15 en $(3,1)$ cuando:

   A. $a = 8$, $b = 12$ y $c = -39$ B.$a = 8$, $b = -12$ y $c = -15$

   C. $a = -8$, $b = -12$ y $c = -39$ D. $a = -8$, $b = -12$ y $c = 33$

9. Usted debe diseñar una cubeta para fabricar hielo de costo mínimo que contenga 12 $pulg^3$ de agua, si la bandeja esta dividida en 12 compartimientos iguales de base cuadráda y el costo del material empleado es de U$1 por $pulg^2$.De que manera resolveria este problema utilizando multiplicadores de Lagrange.



A. Minimizar $F(x,y,z) = xy + 3xz + 7yz$ sujeto a $x = 2y$ y $xyz = 12$
B. Minimizar $F(x,y,z) = xy + 3xz + 7yz$ sujeto a $x = 3y$ y $xyz = 12$
C. Minimizar $F(x,y,z) = xyz$ sujeto a $2xy + 2xz + 2yz = 12$
D. Minimizar $F(x,y,z) = xyz$ sujeto a $xy + 3xz + 7yz = 12$

10. Si se utilizan muliplicadores de Lagrange para hallar la distancia más corta desde el punto $(4,0,0)$ al cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ se debe:

A. Minimizar $F(x,y,z) = z - \sqrt{x^2+y^2}$ sujeto a $G(x,y,z) = (x-4)^2 + y^2 + z^2$
B. Minimizar $F(x,y,z) = (x-4)^2 + y^2 + z^2$ sujeto a $G(x,y,z) = z - \sqrt{x^2+y^2}$
C. Minimizar $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeto a $G(x,y,z) = z - \sqrt{x^2+y^2}$
D. Minimizar $F(x,y,z) = z - \sqrt{x^2+y^2}$ sujeto a $G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

PREGUNTAS DE SELECCIÓN MULTIPLE CON MULTIPLE RESPUESTA

Si 1 y 2 son correctas marque A
Si 2 y 3 son correctas marque B
Si 3 y 4 son correctas marque C
Si 2 y 4 son correctas marque D
Si 1 y 3 son correctas marque E

1. Para el campo escalar $F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ se puede afirmar que:

1. F no es diferenciable en $(0,0)$
2. $F_{xy}(0,0) \neq F_{yx}(0,0)$
3. $F_x(0,0)$ y $F_y(0,0)$.no existen
4. F es diferenciable en $(0,0)$

A. B. C. D. E.

2. Si F es un campo escalar de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ diferenciable en $(2,-1)$ que posee derivadas direccionales iguales a 3 en dirección al punto $(3,-1)$ y es iguala a -2 en dirección al punto $(2,-2)$, entonces es correcto afirmar que:

1. $F_x(2,1) = 3$
2. $F_y(2,1) = -2$
3. $D_vF(2,1) = 5$ si $V = [1,1]$
4. $-\sqrt{13} \leq D_vF(2,1) \leq \sqrt{13}$

A. B. C. D. E.

3. Si F es un campo escalar de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ diferenciable entonces:

1. $\nabla F(x,y,z) = \left[\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial z}\right]$ en coordenadas cilindricas
2. $\nabla F(x,y,z) = \left[\frac{\partial F}{\partial \rho}, \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial \phi}\right]$ en coordenadas esfericas
3. $\nabla F(x,y,z) = \left[\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial z}\right]$ en coordenadas cilindricas
4. $\nabla F(x,y,z) = \left[\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{1}{\rho sen\phi}\frac{\partial F}{\partial \phi}\right]$ en coordenadas esfericas

A. B. C. D. E.

4. La temperatura en un punto (x,y,z) esta dada por $T(x,y,z) = e^{-x^2-3y^2-9z^2}$. La mayor razón de incremento en un punto P, se puede determinar:

1. Encontrando el máximo de la función T
2. Usando multiplicadores de Lagrange
3. Calculando $\|\nabla T(P)\|$
4. Calculando la derivada direccional $F'(P;W)$ donde $W = \lambda \nabla T(P)$ para $\lambda \in \mathbb{R}$

A. B. C. D. E.

5. Suponga que se sustituyen las coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = rsen\theta$ en el campo escalar $w = F(x,y)$, entonces:

1. $\frac{\partial w}{\partial r} = F_x \cos\theta + F_y sen\theta$ 2. $\frac{\partial w}{\partial \theta} = F_x sen\theta + F_y \cos\theta$
3. $F_x = \cos\theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{sen\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}$ 4. $F_y = sen\theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\cos s\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}$

A. B. C. D. E.

6. Para el elipsoide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ en el punto $p(1,1,2)$

1. $3x - 2y + 2z = 34$ es su plano tangente
2. $[x,y,z] = [6,-4,4] + t[1,1,2]$ es su recta normal
3. $[6,-4,4]$ es su vector tangente
4. $3x - 2y + 2z = 9$ es su plano tangente

A. B. C. D. E.

7. Sean $F(x,y) = [\cos y + x, e^{x+y}]$ y $G(u,v) = [Ln(uv), senv - u]$, entonces es correcto afirmar que:

1. $JF(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & e^{x+y} \\ -seny & e^{x+y} \end{bmatrix}$ 2. $JFoG(u,v) = \begin{bmatrix} sen(senv-u) + \frac{1}{u} & -\cos v sen(senv-u) + \frac{1}{v} \\ ve^{senv-u} - uve^{senv-u} & ue^{senv-u} + uv\cos ve^{senv-u} \end{bmatrix}$

3. $JG(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{u} & \frac{1}{v} \\ 1 & \cos v \end{bmatrix}$ 4. $JGoF(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{e^{x+y}}{\cos y + x} & \frac{-senye^{x+y}}{\cos y + x} \\ e^{x+y}\cos(e^{x+y}) + 1 & e^{x+y}\cos(e^{x+y}) + seny \end{bmatrix}$

A. B. C. D. E.

8. Las ecuaciones $x+y=uv$ y $xy=u-v$ definen implícitamente a x y y como funciones de u y v, entonces:

1.$\dfrac{\partial y}{\partial u}=\dfrac{vy-1}{y-x}$ 2.$\dfrac{\partial y}{\partial v}=\dfrac{y-x}{u\,\mathrm{y}-1}$ 3. $\dfrac{\partial x}{\partial v}=\dfrac{ux+1}{x-y}$ 4. $\dfrac{\partial x}{\partial u}=\dfrac{x-y}{xv-1}$

A. B. C. D. E.

9. Para el campo escalar $F(x,y)=x^2+xy^2+y^4$ se puede afirmar que:

1. Posee punto de silla en $(0,0)$ 2. No tiene puntos críticos
3. El criterio del hessiano no decide 4. Posee mínimo en $(0,0)$

A. B. C. D. E.

10. Para encontrar la distancia mínima de la curva $y=\sqrt{1-x^2}$ al punto $(0,1)$, se debe utilizar:

1. Criterio del Hessiano 2. Multiplicadores de Lagrange.
3. Criterio de una variable 4. Geometría.

A. B. C D. E.

PREGUNTAS ABIERTAS

1. Si $\boldsymbol{F}$ es una función vectorial de $D\subset\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y $\forall \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ de $\mathbb{R}^n$ demuestre que $\boldsymbol{F}$'$(\boldsymbol{a};\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=\boldsymbol{F}$'$(\boldsymbol{a};\boldsymbol{v}_1)+\boldsymbol{F}$'$(\boldsymbol{a};\boldsymbol{v}_2)$

2. Si A es una matriz simétrica de $n\times n$, y $F(x)=x^tAx$ demuestre que $\nabla F(x)=2Ax$

3. Sea P un punto de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ y sea T un vector tangente a la elipse en P. Si $F(x,y)=d_1+d_2$ determina la suma de las distancias de los focos a P. Pruebe que $T\bullet\nabla F(x,y)=0$ y de una interpretación geométrica del resultado.

4. Si F_1 y F_2 son campos escalares de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ diferenciables, determine la matriz jacobiana en el origen del campo vectorial $\boldsymbol{F}(x,y)=[x^2F_1(x,y),y^2F_2(x,y)]$

5. Sea $H(\boldsymbol{x})=F(\mathbb{G}(\boldsymbol{x}))$ tal que F es un campo escalar diferenciable en $\mathbb{G}(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}$ y $\mathbb{G}$ es un campo vectorial diferenciable en $\boldsymbol{a}$. Utilizar la regla de la cadena para demostrar que el gradiente de H puede expresarse como combinación lineal de los vectores gradientes de las componentes de $\mathbb{G}$, asi :$\nabla H(\boldsymbol{a})=D_kF(\boldsymbol{b})\nabla G_k(\boldsymbol{a})$

6. Hallar la derivada direccional de $F(x,y,z)=Senx+Cosy+Tanz$ a lo largo de la curva intersección entre las superficies $y=e^x$ y $z=xy$ en el punto $P=(1,e,e)$

7. Hallar la dirección de mayor crecimiento de el campo escalar $z=F(x,y)$ dado implícitamente por $ArcTan(x+y+z)+3xyz+z=0$

8. Sea F un campo escalar y C_1 y C_2 dos curvas tales que :$F'((1,1);C_1) = \sqrt{5}$, $F'((1,1);C_2) = \sqrt{10}$ con $C_1 : y = x^2$ y C_2: $y = x^3$ respectivamente. Hallar la derivada direccional de F en $(1,1)$ a lo largo de $y = x$

9. Demuestre que la suma de los cuadrados de las coordenadas x, y, z de las intersecciones con los ejes X, Y, Z de cualquier plano tangente a la superficie $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ es igual a la constante a^2.

10. Demuestre que los planos tangentes a la superficie $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ cortan los ejes coordenados en puntos cuya suma de distancias al origen es constate

11. Sea F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar definido asi : $F(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, ..., x_1 + x_2 + ... + xn)$. donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si $\nabla f(1, 2, ..., n) = (1, 2, ..., n)$ Halle $\nabla F(1, 1, ..., 1)$

12. Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar definido asi : $F(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3, ..., x_1x_2...x_n)$ donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si $\nabla f(1, 2, ...,n) = (a_1, a_2, ..., a_n)$ Halle $\nabla F(1, 1, ..., 1)$

13. Obtenga la formula de Taylor de segundo orden del campo escalar dado en el origen. $F(x, y) = Ln(1 - x) + Ln(1 - y)$

14. Para que valor de k el campo escalar $F(x, y) = y^3 + 3x^2y - kx^2 - ky^2 + 2$ tiene un máximo en $(0, 0)$, un mínimo en $(0, 2)$ y un punto de silla en $(1, 1)$

15. Encuentre los puntos criticos del campo escalar F analizando todos los casos posibles para p y q reales no nulos.

    a) $F(x, y) = xy + px + qy$
    b) $F(x, y) = xy + \dfrac{p}{x} + \dfrac{q}{y}$
    c) $F(x, y) = \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q}$

16. Considere el campo escalar $F(x, y) = \int_{xy}^{x+y} g/t)dt$, con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, tal que $g(1) = g(2) = 3$, $g'(1) = 3$ y $g'(2) = 4$..Demuestre que $(1, 1)$ es punto critico de F

17. Hallar los puntos criticos de $F(x, y) = (x - y)^n$ sobre la curva $x^2 + y^2 = 1$

18. Sea n un entero mayor que 2 y sea $F(x, y) = ax^n + cy^n$, donde $ac \neq 0$. Determinar la naturaleza de los puntos criticos de F.

19. Hallar la distancia más corta desde el origen hasta la intersección entre los planos $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ y $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$,si $a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = 1$

20. Hallar la mínima distancia desde el punto $(1, 0)$ a la parábola $y^2 = 4x$

PROBLEMAS

1. La fórmula $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$ determina la resistencia total R de dos resistores conectados en paralelo, con resistencias R_1 y R_2. Si las medidas de las resistencias, en ohms son $R_1 = 25$, $R_2 = 100$ con un posible error en cada medida de 0,5 ohms. Calcular y dar un estimativo para el máximo error en el valor calculado de R.

2. La temperatura T en un punto (x, y) de una placa metalica colocada en el plano XY es inversamente proporcional a la distancia al origen. La temperatura en $P = (3, 4)$ es 100º C

   a) Calcule la razón de cambio de T en P en dirección i + j
   b) En que dirección aumenta más rápido T?
   c) En que dirección disminuye más rápido T ?
   d) En que dirección no cambia T ?

3. Suponer que una montaña tiene la forma de un paraboloide $z = c - ax^2 - by^2$, donde a , b y c son constantes positivas

   a) En que dirección está aumentando más rápido la altitud si una persona se halla en el punto $(1, 1)$.
   b) Si se suelta una canica en el punto $(1, 1)$ en que dirección comenzara a rodar?

4. En cierto rombo una diagonal crece a razón de 10 cm/seg y el lado crece a razón de 3 cm/seg (conservandose la forma del rombo). Halle la variación del área del rombo en el momento en que la otra diagonal mide $20\sqrt{21}$ cm y el lado 50 cm.

5. Un alumno comienza a subir desde la calle 45 hacia la carrera 5 a 3 pies/seg, 5minutos despúes una alumna baja por el tunel de la calle 40 (situado a 550 pies de la calle 45) hacia la caracas a 4 pies/seg. Con que velocidad se separan los dos alumnos 5 minutos despueś de que la alumna inicia su recorrido?

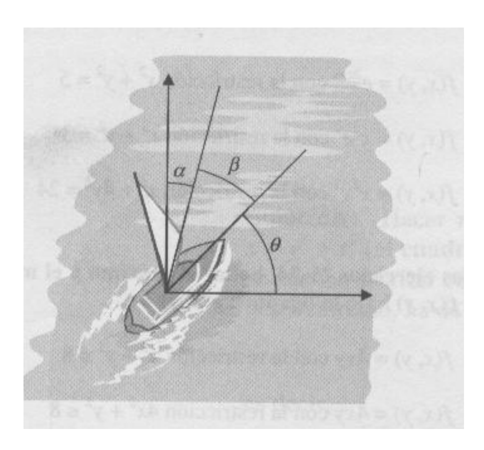
6. Suponer que un pato está nadando en la curva $x = \text{Cos}t$, $y = \text{Sen}t$ y que la temperatura del agua está dada por la formula $T(x, y) = x^2 e^y - xy^3$. Hallar la tasa de cambio de la temperatura que puede sentir el pato.

   a) Mediante la regla de la cadena
   b) Diferenciando

7. Encontrar los valores máximo y mínimo del campo electrico $F(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ sobre el borde de un monitor cuya forma está determinada por la ecuación $2x^4 + 3y^4 = 32$

8. Una empresa fabrica dos tipos de zapatillas para micfrofutbol y para voleibol. El ingreso total de x_1 unidades de zapatillas para microfutbol y x_2 unidades de zapatillas para voleibol es $I(x_1, x_2) = -5x_1^2 - 8x_2^2 - 2x_1x_2 + 42x_1 + 102x_2$ donde x_1 y x_2 estan dadas en miles de unidades. Hallar el número de zapatillas que maximizan el ingreso.

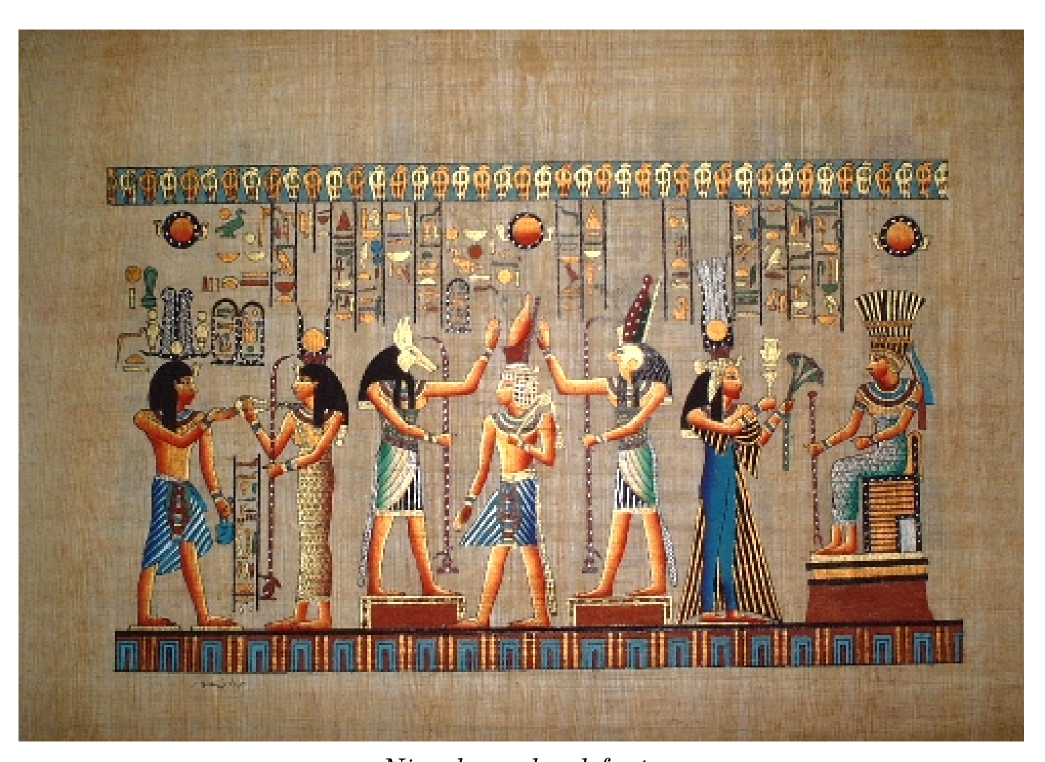
9. Un velero parte de Santa Marta y navega con viento del norte. Su vela forma con el norte un ángulo α y con el eje del casco un ángulo β el casco, a su vez, forma un ángulo θ con la dirección este (véase la figura). Si el viento sopla con velocidad w, la componente norte de la fuerza del viento sobre el velero viene dada por $wsen\alpha sen\beta sen\theta = \pi$. Si esta componente es positiva el velero puede "navegar contra el viento". Utilizando multiplicadores de Lagrange máximizar la fuerza del viento.



10. Un egiptologo encontro dentro de una piramide de base cuadrada de lado $\sqrt{2}m$ y altura $2m$ una caja rectangular de mayor volumen posible con las joyas de Tutankamon, la posición de la caja era tal que cada arista de la tapa superior estaba sobre cada una de las caras laterales de la piramide. ¿Cual es el volumen de la caja?

CAPÍTULO 4

INTEGRALES MULTIPLES



Ni vale nada el fruto
cogido sin sazón...
Ni aunque te elogie un bruto
ha de tener la razón.
ANTONIO MACHADO
"Proverbios y cantares"

En el curso anterior de cálculo se integraron funciones f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ cuya interpretación bajo ciertas condiciones era el área debajo de la curva . Algunas de estas integrales se calcularon por diferentes metodos de integración y otras se aproximaron por métodos numericos. Este tipo de integrales se denominan simples por ser de una variable y nos serviran para generalizar las integrales multiples. Los capitulos 2 y 3 estan dedicados al cálculo diferencial multivariado, ahora nos dedicaremos al estudio del cálculo integral multivariado. El concepto más importante que motiva la teoria de integración es el cálculo de volumenes de conjuntos en $\mathbb{R}^n$.

En este capitulo se integraran campos escalares de $\mathbb{R}^2$en $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}^3$en $\mathbb{R}$ por medio de integrales dobles y de integrales triples sobre regiones de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, haciendo más enfasis en el aspecto geometrico de la región de integración que en el cálculo de la integral. En la primera sección se trataran integrales dobles sobre rectángulos utilizando inicialmente el concepto partición sobre un rectangulo, calculando la integral de un campo escalar escalonado como una consecuencia de función escalonada en una variable y termina con integrales iteradas. En la segunda sección se trataran integrales dobles sobre regionen más generales haciendo enfasis en la región de integración y en el cambio del orden de integración. En la tercera sección se tratará el cambio de coordendas haciendo más enfasis en coordenadas polares, En este capitulo tambien se le dara mayor importancia al aspecto geométrico de una región de integración $\overline{R}$ obtenida de R por medio de un cambio de coordenadas apropiado. En la cuarta sección se trataran algunas aplicaciones geometricas y fisicas con integrales dobles. En la quinta sección se trataran integrales triples. En la sexta sección se trataran cambios de coordenadas en integrales triples haciendo más enfasis en coordenadas cilindricas y esfericas. En la septima sección se trataran algunas aplicaciones geometricas y fisicas con integrales triples.

4.1. Integrales dobles sobre rectángulos.

El objetivo de esta sección es introducir el concepto de integral doble para campos escalares, similar a la forma como se trabaja en una variable empezaremos con el concepto de antiderivada bajo ciertas condiciones, luego seguiremos con los conceptos de partición sobre rectangulos, campo escalar escalonado, ya que la manera más sencilla de abordar el concepto de integral doble es iniciarlo con campos escalares escalonados como una consecuencia de función escalonada en una variable.

En el capitulo 3 se vio como derivar parcialmente un campo escalar respecto a una variable manteniendo constantes las otras variables, emplearemos un procedimieno similar para integrar campos escalares.

Un campo escalar F es una antiderivada de un campo escalar ϕ respecto a x en un intervalo I si $F_x(x,y) = \phi(x,y)$ para todo x en I. De manera similar un campo escalar F es una antiderivada de un campo escalar φ respecto a y en un intervalo J si $F_y(x,y) = \varphi(X,Y)$ para todo y en J.

Cuando resolvemos una ecuación diferencial de la forma
$\frac{dz}{dx} = F_x(x,y)$ o $dz = F_x(x,y)dx$,
la operación que determina todas las soluciones de esta ecuación se denomina antiderivación o integral indefinida y se denota por
$z = \int F_x(x,y)dx = F(x,y) + C(y)$

Ejemplo 4.1.1 *Si $F_x(x,y) = 3x^2y^3$ entonces manteniendo y constante podemos integrar respecto a x y obtenemos*
$F(x,y) = \int F_x(x,y)dx$
$= \int 3x^2y^3dx$
$= y^3 \int 3x^2dx$ *propiedad de la integral ya que y es constante*
$= y^3x^3 + C(y)$ *una antiderivada de $3x^2$ es x^3*
$= x^3y^3 + C(y)$ *$C(y)$ es una función de y^2*

De igual manera podemos considerar una ecuación diferencial de la forma
$\frac{dz}{dy} = F_y(x,y)$ o $dz = F_y(x,y)dy$
cuya soluciòn es $z = \int F_y(x,y)dy = F(x,y) + C(x)$

Podemos concluir que al integrar con respecto a x o a y se puede recobrar $F(x,y)$ parcialmente, pero no es tan facil recobrar totalmente un campo escalar a partir de sus derivadas parciales, por lo tano abordaremos este tema en el siguiente capitulo.

Tambien podemos extender la integral indefinida a integral definida utilizando el teorema fundamental del cálculo.

Ejemplo 4.1.2 $\int_1^2 3x^2y^3dx = x^3y^3|_1^2 = 2^3y^3 - 1^3y^3 = 7y^3$

De manera similar podemos integrar respecto a y, manteniendo x constante. Ambos procedimientos se pueden generalizar de la siguiente manera.
$\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} F_x(x,y)dx = F(x,y)|_{h_1(y)}^{h_2(y)} = F(h_2(y),y) - F(h_1(y),y)$
respecto a x

$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F_y(x,y)dy = F(x,y)|_{g_1(x)}^{g_2(x)} = F(x,g_2(x)) - F(x,g_1(x))$
respecto a y

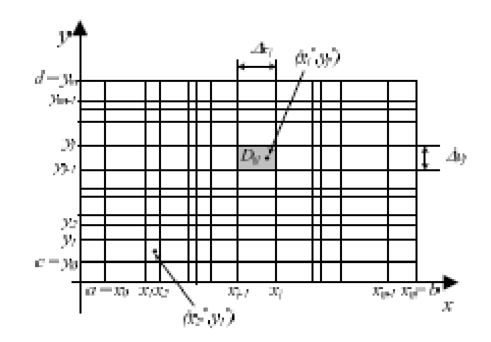
Por ahora tanto h como g son funciones constantes, o sea las integrales estan definidas sobre intervalos.

Supongamos que R es una región rectangular de $\mathbb{R}^2$ determinada por $R = I \times J$, tal que $I = [a,b]$ y $J = [c,d]$ entonces

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$, y sean P_x y P_y dos particiones de I y J respectivamente, tales que

$P_x = \{\ x_0,\ x_1, ..., \ x_n\}$ con $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$
y $P_y = \{y_0, y_1, ..., y_m\}$ con $c = y_0 < y_1 < ... < y_m = d$,
entonces $P = P_x \times P_y$ es una partición de R determinada por
$P = \{(x_i, y_j)|\ x_i \in P_x$ y $y_j \in P_y$, con $i = 1,2,...,n \ \ j = 1,2,...,m\}$.

Si la partición P_x tiene $n+1$ elementos y n subintervalos de longitud $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$ y la partición P_y tiene $m+1$ elementos y m subintervalos de longitud $\triangle y_j = y_j - y_{j-1}$ entonces la región rectangular R queda dividida en nm rectángulos R_{ij} de área $\triangle x_i \triangle y_j$.



Partición P de una región rectangular D.

Un campo escalar F definido en una región rectángular R de R^2, se llama escalonado si existe una partición P de R, tal que F es constante en cada rectángulo abierto R_{ij} de R.

Propiedad 4.1.1 *Si F y G son campos escalares escalonados entonces $kF + lG$ con $k, l \in \mathbb{R}$, es campo escalar escalonado.*

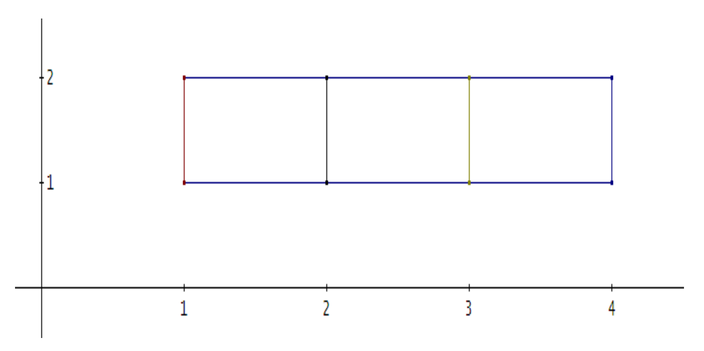
Sea F,un campo escalar escalonado definido en una región rectángular R de $\mathbb{R}^2$, P una partición de R en nm rectángulos R_{ij} de R^2 y $F(x,y) = c_{ij}$ (constante) en el interior de cada rectángulo R_{ij} entonces F es integrable en R y su integral es igual a $\int_R \int F(x,y)dA = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$

Nota: dA es un diferencial de area determinado por $dA = dxdy$ o $dA = dydx$ de acuerdo al orden de integración.

Ejemplo 4.1.3 *Calcular la integral del campo escalar*

$$F(x,y) = \begin{cases} -2 & si\ (x,y) \in R_1 \cup R_2 \\ 5 & si\ (x,y) \in R_3 \end{cases} \quad sobre\ R = R_1 \cup R_2 \cup R_3.,$$

Utilizando la siguiente partición
$R_1 = [1,2] \times [1,2]$, $R_2 = [2,3] \times [1,2]$ *y* $R_3 = [3,4] \times [1,2]$..



De acuerdo a la partición se ve claramente que $\triangle x = 1$ *y* $\triangle y = 1$
y de acuerdo a los valores que toma $F(x, y)$ *en la partición*
$\int_R \int F(x, y)dA = (-2)(1) + (-2)(1) + (5)(1) = 1$

Propiedad 4.1.2 *Si* F *y* G *son campos escalares escalonados de* $\mathbb{R}^2$ *en* $\mathbb{R}$ *definidos en una region rectangular* R *de* $\mathbb{R}^2$ *y* $k \in \mathbb{R}$*, entonces:*
(i) $\int_R \int kF(x, y)dA = k \int_R \int F(x, y)dA$
(ii) $\int_R \int (F(x, y) \pm G(x, y))dA = \int_R \int F(x, y)dA \pm \int_R \int G(x, y)dA$
(iii) $\int_R \int F(x, y)dA = \int_R \int F(x, y)dA + \int_R \int F(x, y)dA$
Si $R = R_1 \cup R_2$ *(dos rectángulos) y* $int(R_1) \cap int(R_2) = \emptyset$
(iv) Si $F(x, y) \geq G(x, y)\ \forall (x, y) \in R$ *entonces*
$\int_R \int F(x, y)dA \geq \int_R \int G(x, y)dA$
Demostración. *Se realiza utilizando la definición de integral doble y propiedades de la sumatoria.* ■

Sea F *un campo escalar de* R^2 *en* R *definido y acotado en una región rectángular* R *de* R^2*, supongamos que existe una constante* $M \in R$ *tal que* $|F(x, y)| \leq M$*, entonces existen dos campos escalares escalonados* $G(x, y) = -M$ *y* $H(x, y) = M$ *definidos en* R*, tales que* $G(x, y) \leq F(x, y) \leq H(x, y)$ *para todo* $(x, y) \in R$*: Si existe un único número* I *tal que* $\int_R \int G(x, y)dA \leq I \leq \int_R \int H(x, y)dA$ *entonces* F *es integrable en* R *y* $\int_R \int F(x, y)dA = I$*.*

Sea F *es un campo escalar de* R^2 *en* R *definido y acotado en una región rectángular* R *de* R^2*,* P *una partición de* R *en* nm *rectángulos* R_{ij}*.y* (x_i^*, y_j^*) *es un punto arbitario de cada* R_{ij} *entonces*
$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} F(x_i^*, y_j^*)\Delta x \Delta y$ *determina una suma de Riemman de* F *sobre* R

Si seleccionamos en cada rectángulo R_{ij} el punto que tenga la mayor imagen M_{ij} obtenemos una suma superior

$$U = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\Delta x \Delta y,$$

de igual manera si en cada rectángulo R_{ij} seleccionamos el punto que tenga la menor imagen m_{ij} obtenemos una suma inferior

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\Delta x \Delta y,$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\Delta x\Delta y \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} F(x_i^*, y_j^*)\Delta x\Delta y \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\Delta x\Delta y$$

por lo tanto U y L son aproximaciones de $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} F(x_i^*, y_j^*)\Delta x\Delta y$.

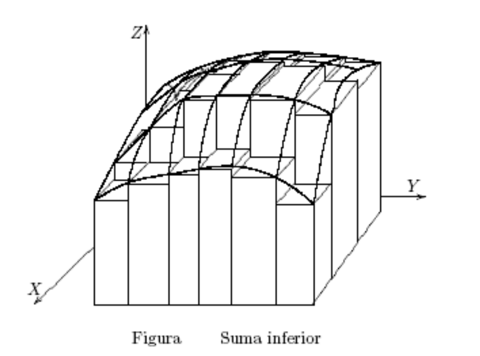


Figura Suma inferior

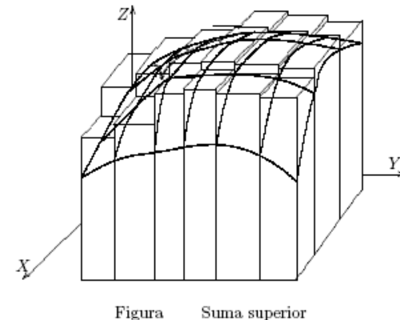


Figura Suma superior

Sea *F un campo escalar de de R^2 en R definido y acotado en una región rectángular R de R^2, entonces la integral doble de F sobre R se define como* $\int_R\int F(x,y)dA = \lim_{(\Delta x\Delta y)\to(0,0)} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} F(x_i^*, y_j^*)\Delta x\Delta y$ *siempre que el límite exista, ademas si existe, decimos que F es integrable sobre R.*

La *integral doble de F sobre R es el límite de las sumas de Riemann.* [1]

Ejemplo 4.1.4 *Utilizando los valores $F(x,y)$ de la tabla dada estimar* $\int_R\int F(x,y)dA$ *si* $R = [1,2] \times [2,4]$.

$x\backslash y$	2	3	4
1	5	4	3
1,5	7	6	5
2	10	8	4

De acuerdo a la tabla podemos asegurar que $\triangle x = 0{,}5$, $\triangle y = 1$
y R tiene una partición de cuatro rectángulos
los valores de la tabla son las imagenes de los vértices de los rectángulos.
luego $L = (4+3+4+6)(0{,}5)(1) = 8{,}5$
y $U = (7+6+8+10)(0{,}5)(1) = 15{,}5$
por lo tanto $8{,}5 \leq \int_R\int F(x,y)dA \leq 15{,}5$

1



Georg Friedrich Bernhard Riemann Nacio el 17 de septiembre de 1826 en Breselenz, actual Alemania, murio el 20 de junio de 1866 en Selasca Italia. Matemático alemán que en su corta vida contribuyó a muchísimas ramas de las matemáticas: integrales de Riemann, aproximación de Riemann, método de Riemann para series trigonométricas, matrices de Riemann de la teoría de funciones abelianas, funciones zeta de Riemann, hipótesis de Riemann, teorema de Riemann-Roch, lema de Riemann-Lebesgue, integrales de Riemann-Liouville de orden fraccional, aunque tal vez su más conocida aportación fue su geometría no euclidiana, basada en una axiomática distinta de la propuesta por Euclides, y expuesta detalladamente en su célebre memoria Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría.

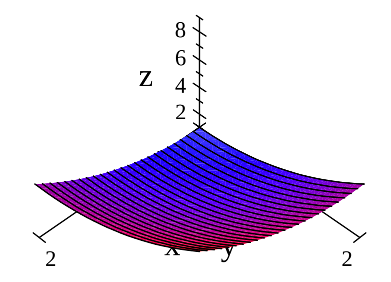
Ejemplo 4.1.5 *Muestre que* $\int_1^3 \int_0^2 \frac{y}{x} dydx < 5$.

El campo escalar $F(x,y) = 2 \geq \frac{y}{x}$ *para todo* $(x,y) \in R = [1,3] \times [0,2]$
entonces consideremos la siguiente partición de R,
$R_1 : [1,2] \times [0,1]$, $R_2 : [1,2] \times [1,2]$, $R_3 : [2,3] \times [0,1]$ *y* $R_4 : [2,3] \times [1,2]$,
los valores máximos que toma el campo escalar $\frac{y}{x}$ *en cada uno de estos rectángulos es* 1, 2, $\frac{1}{2}$ *y* 1, *respectivamente,*
entonces $\int_1^3 \int_0^2 \frac{y}{x} dydx \approx 1(1)(1) + 2(1)(1) + \frac{1}{2}(1)(1) + 1(1)(1) = 4{,}5$

Si una región rectángular esta definida por $R = [a,b] \times [c,d]$ de $\mathbb{R}^2$ entonces el área de R está dada por
$A = \int_a^b \int_c^d dydx$ (o $A = \int_c^d \int_a^b dxdy$)

Si F es un campo escalar de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ continuo en una región rectángular $R = [a,b] \times [c,d]$ de $\mathbb{R}^2$ y ademas $F(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y) \in R$, entonces el volumen debajo de la gráfica de F sobre R está dado por
$V = \int_a^b \int_c^d F(x,y)dydx$ (o $V = \int_c^d \int_a^b F(x,y)dxdy$)

Ejemplo 4.1.6 *Estime el volumen del sólido definido sobre la región rectangular* $R = [0,2] \times [0,2]$ *y bajo el paraboloide* $z = 1 + x^2 + y^2$



Utilizando las particiones $P_x = \{0,1,2\}$ *y* $P_y = \{0,1,2\}$
entonces P *determina cuatro rectangulos* R_{ij} *de lado uno*
eligiendo como punto muestral la esquina superior derecha de cada rectángulo R_{ij}

$$V = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} F(x_i^*, y_j^*)\Delta x \Delta y$$
$$= F(1,1) + F(1,2) + F(2,1) + F(2,2)$$
$$= 4 + 6 + 6 + 9 = 25$$

Teorema 4.1.1 *Si F es un campo escalar de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ acotado e integrable en una región rectangular R de $\mathbb{R}^2$ y supongamos que para cada $y \in [c,d]$ existe una función g de $[c,d]$ en $\mathbb{R}$ tal que $g(y) = \int_a^b F(x,y)dx$ entonces g es integrable y*

$\int_R \int F(x,y)dA = \int_c^d g(y)dy = \int_c^d \int_a^b F(x,y)dxdy$

Demostración. Si ϕ y ψ son dos campos escalares escalonados en R,

tales que $G(x,y) \leq F(x,y) \leq H(x,y)\ \forall (x,y) \in R$

entonces $\int_a^b G(x,y)dx \leq \int_a^b F(x,y)dx \leq \int_a^b H(x,y)dx$

o sea $\int_a^b G(x,y)dx \leq g(y) \leq \int_a^b H(x,y)dx$

como g es integrable respecto a y

$\int_c^d \int_a^b G(x,y)dxdy \leq \int_c^d g(y)dy \leq \int_c^d \int_a^b H(x,y)dxdy$

Como G y H son dos campos escalares escalonados en R

y $F(x,y)$ es integrable en R,

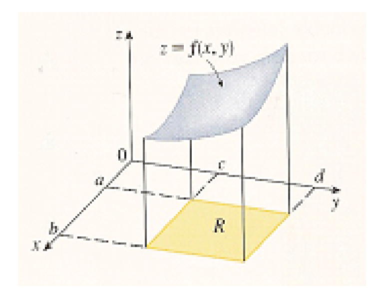
entonces $I = \int_c^d g(y)dy = \int_R F(x,y)dxdy$ ■

Nota : De igual forma si suponemos que para cada $x \in [a,b]$ existe una función h de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$ tal que $h(x) = \int_c^d F(x,y)dy$ entonces f es integrable y

$\int_R \int F(x,y)dA = \int_a^b h(x)dy = \int_a^b \int_c^d F(x,y)dxdy$

Teorema 4.1.2 *de Fubini. Si F es un campo escalar de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ continuo en una región rectángular $R = [a,b] \times [c,d]$ de $\mathbb{R}^2$, entonces F es integrable en R y la integral doble de F sobre R es igual a.*

$\int_R \int F(x,y)dA = \int_c^d \left(\int_a^b F(x,y)dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d F(x,y)dx \right) dy$

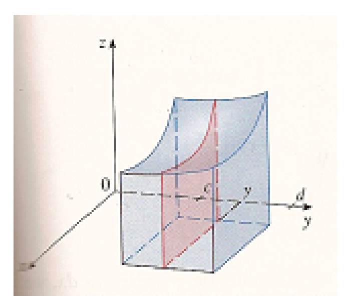


Demostración.

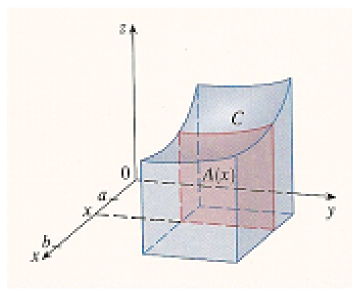
Por el teorema anterior vemos que para cada $y \in [c,d]$

$g(y) = \int_a^b F(x,y)dx$ determina un área $A(y)$ sobre el intervalo $[c,d]$

luego $\int_R F(x,y)dA = \int_c^d A(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b F(x,y)dy \right) dx$



De igual forma para para cada $x \in [a, b]$
$h(x) = \int_c^d F(x, y)dy$ determina un área $A(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$
luego $\int_R F(x, y)dA = \int_a^b A(x)dy = \int_a^b \left(\int_c^d F(x, y)dx\right) dy$



■

Ejemplo 4.1.7 *Calcular* $\int_0^1 \int_0^1 (x + y)dydx$

$\int_0^1 \int_0^1 (x + y)dydx == \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right) |_0^1 dx$
$= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\right) |_0^1 dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Ejercicios sección 4.1.

1. Hallar la antiderivada del campo escalar dado

   a) $F_x(x, y) = \cos x + y$
   b) $F_y(x, y) = x + seny$
   c) $F_x(x, y) = e^{2x+3y}$

2. Evaluar la integral dada.

   a) $\int_{-1}^1 x^2 + y^2 + 1dx$
   b) $\int_1^e x \ln ydy$
   c) $\int_1^2 \frac{y + 1}{x + 2}dx$

3. Determine si el campo escalar dado es escalonado en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ con a,b,c,d reales positivos.

   a) $F(x, y) = [[x]] + [[y]]$
   b) $F(x, y) = [[x + y]]$
   c) $F(x, y) = [[x]]\,[[y]]$

4. Calcule la integral del campo escalar F sobre la región rectangular $R = [-2, 2] \times [-2, 2]$, considerando la partición de R en cuatro rectángulos R_i donde i determina el cuadrante.

   a) $F(x, y) = 15i$
   b) $F(x, y) = \begin{cases} 7 & \text{si } (x, y) \in R_1 \cup R_2 \\ -3 & \text{si } (x, y) \in R_3 \cup R_4 \end{cases}$
   c) $F(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{si } (x, y) \in R_1 \\ 5 & \text{si } (x, y) \in R_2 \\ 10 & \text{si } (x, y) \in R_3 \\ 15 & \text{si } (x, y) \in R_4 \end{cases}$

5. Para el campo escalar dado y definido en el rectángulo R. Trace un diagrama de la partición de R , indique los valores de F en la partición y calcule la integral de F sobre R

   a) $F(x, y) = [2x][3y] \quad R = [0, 2] \times [-1, 2]$
   b) $F(x, y) = [x + 1][y + 2] \quad R = [-1, 3] \times [-2, 2]$
   c) $F(x, y) = [x^2][y^2] \quad R = [0, 3] \times [0, 2]$

6. Estimar la integral $\int_0^1 \int_0^1 e^{-x^2-y^2} dydx$ utilizando:

   a) 4 rectangulos
   b) 8 rectangulos
   c) 16 rectangulos

7. Utilizando los valores $F(x, y)$ de la tabla dada estimar $\int_R \int F(x, y) dA$ si $R = [1, 2] \times [2, 4]$.

$x \backslash y$	1,25	1,50	1,75	2,00
0,75	1	0,98	0,83	0,79
1,50	0,97	0,81	0,76	0,68
2,25	0,80	0,73	0,67	0,56
3,00	0,71	0,66	0,52	0,44

8. Estime el volumen debajo de la superficie dada sobre la región rectangular $R = [0,1] \times [0,1]$, considerando la partición de R en cuatro rectángulos R_i donde i determina el cuadrante.

   a) $F(x,y) = xy$
   b) $F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
   c) $F(x,y) = sen(x+y)$

9. Calcular la integral doble del campo escalar dado.sobre la región R.

   a) $F(x,y) = 2x+3y,\ R = [-1,2] \times [2,3]$
   b) $F(x,y) = e^{x+y}, R = [0,2] \times [1,3]$
   c) $F(x,y) = xseny,\ R = [0,1] \times [0,\pi/2]$

10. Demuesre que $\dfrac{1}{2} < \int_0^1 \int_0^1 \dfrac{1}{x+y+3} < \dfrac{1}{3}$

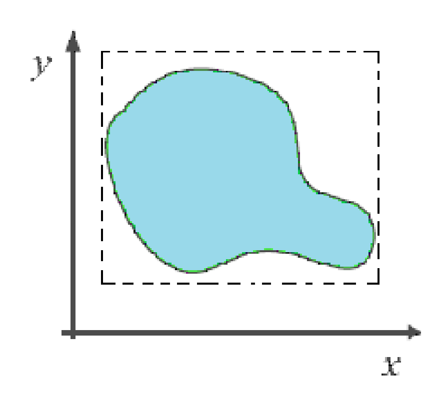
11. Represente graficamente el volumen determinado por la integral dada.

   a) $\int_0^1 \int_0^1 (2-x-y)dydx$
   b) $\int_0^1 \int_0^1 (2-x^2-y^2)dydx$
   c) $\int_0^1 \int_0^1 (\sqrt{x^2+y^2}dydx$

12. Utilizando un CAS construya una función que permita graficar paralelepipedos sobre una partición de una región rectangular dada.

4.2. Integral doble sobre regiones generales

En la sección anterior se considerarón integrales dobles sobre regiones rectangulares, en esta sección se considerarán integrales dobles sobre regiones más generales. Suponemos que la región no rectangular Ω es acotada, o sea puede estar contenida dentro de una región rectangular R.



Si F es un campo escalar definido y acotado en una región Ω y G es un campo escalar definido y acotado en una región rectangular R que contiene a Ω tal que $G(x,y) = \begin{cases} F(x,y) & \text{si } (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin \Omega \end{cases}$ entonces $\int_\Omega \int F(x,y)dA = \int_R \int G(x,y)dA$

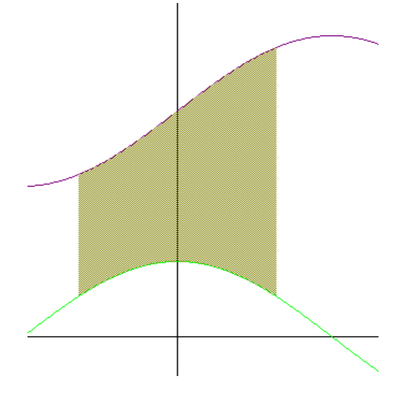
A continuación veremos los diferentes tipos de regiones generales para integrales dobles.

REGION TIPO I

Sea F es un campo escalar de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ continuo en una region Ω de $\mathbb{R}^2$ determinada por dos funciones continuas de variable x en un intervalo $[a,b]$ tal que

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b,\, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$

entonces $\int_\Omega \int F(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x,y)dydx$

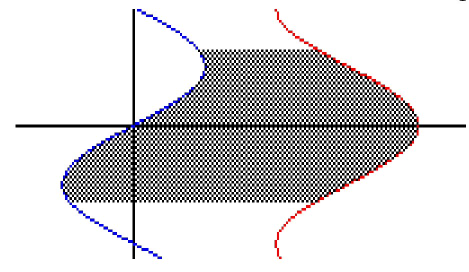


REGION TIPO II

Sea F es un campo escalar de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ continuo en una region Ω de $\mathbb{R}^2$ determinada por dos funciones continuas de variable x en un intervalo $[a,b]$ tal que

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | c \leq y \leq d,\, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$

entonces $\int_\Omega \int F(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} F(x,y)dxdy$

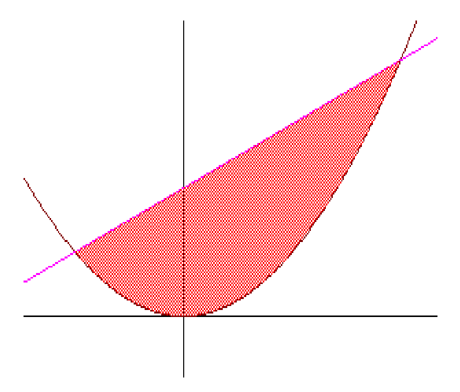


REGION TIPO III

Sea F es un campo escalar de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ continuo en una region Ω de $\mathbb{R}^2$ determinada por dos funciones continuas de variable x,

$g_1(x) \leq \Omega \leq g_2(x)$ con $g_1(x_0) = g_2(x_0)$ y $g_1(x_n) = g_2(x_n)$

entonces $\int_\Omega \int F(x,y)dA = \int_{x_0}^{x_n} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x,y)dydx$

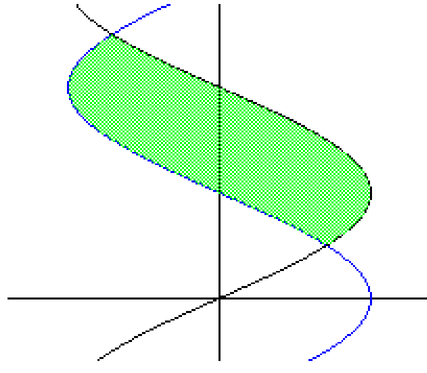


REGION TIPO IV

Sea F es un campo escalar de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ continuo en una region Ω de $\mathbb{R}^2$ determinada por dos funciones continuas de variable y,

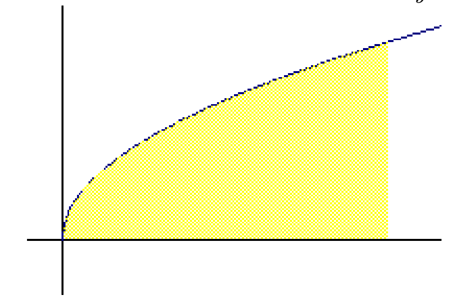
$h_1(y) \leq \Omega \leq h_2(y)$ con $h_1(y_0) = h_2(y_0)$ y $h_1(y_m) = h_2(y_m)$

entonces $\int_\Omega \int F(x,y)dA = \int_{y_0}^{y_m} \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} F(x,y)dxdy$



Nota: Cualquier otra región se puede representar por la unión de varias regiones de diferente tipo.

Ejemplo 4.2.1 *Calcular* $\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \int_{y^2}^{\sqrt[3]{\pi^2}} sen\sqrt{x^3}dxdy$



la integral interna no es facìl de hallar en el orden dado,
cambiando el orden de integración

$\int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \int_0^{\sqrt{x}} sen\sqrt{x^3}dydx$

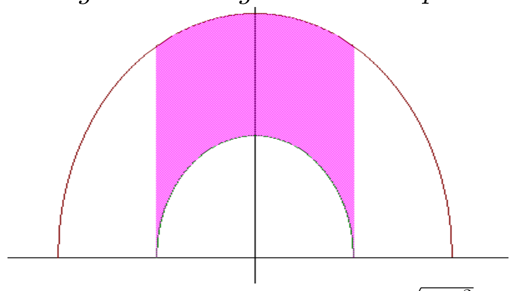
$= \int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} sen\sqrt{x^3}y|_0^{\sqrt{x}}dx = \int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sqrt{x}sen\sqrt{x^3}dx$

utilizando la sustitución $u = \sqrt[3]{x^2}$, $du = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}dx$

$\int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sqrt{x} sen \sqrt{x^3} dx = \dfrac{2}{3}\int_0^{\pi} senudu = -\dfrac{2}{3}\cos u|_0^{\pi} = \dfrac{4}{3}$

Ejemplo 4.2.2 *Para la integral* $\int_{\Omega}\int F(x,y)dA$ *grafique la región de integración* $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \le x \le 1, \sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}\right\}$ *y escriba la integral doble con sus respectivos límites.*

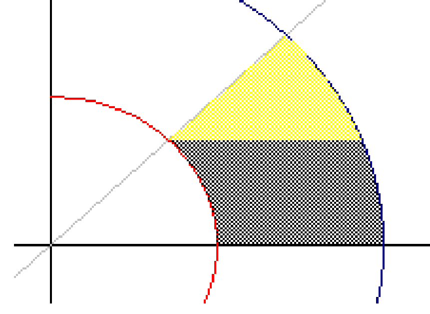
La región de integración es la porción de un anillo circular.



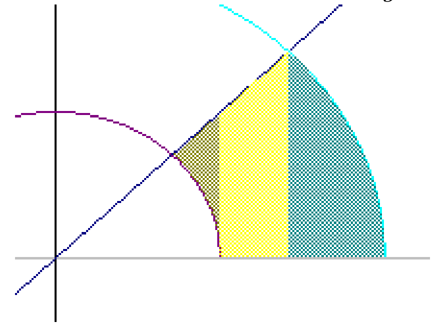
luego $\int_{\Omega}\int F(x,y)dA = \int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} F(x,y)dydx$

Ejemplo 4.2.3 *Para la suma de integrales dada grafique la región de integración e invierta el orden.* $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} F(x,y)dxdy + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\int_y^{\sqrt{4-y^2}} F(x,y)dxdy$

De acuerdo a los límites de integración de la primera integral y de la segunda integral obtenemos la siguiente región



cambiando el orden de integración se generan tres regiones



entonces la suma de integrales es igual a

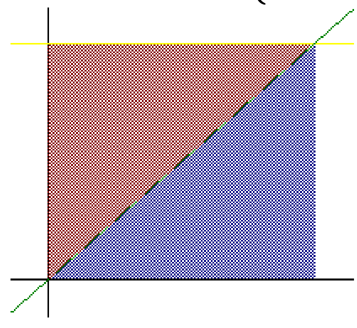
$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} F(x,y)dxdy + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\int_y^{\sqrt{4-y^2}} F(x,y)dxdy$

$= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} F(x,y)dydy + \int_{1}^{\sqrt{2}} \int_{0}^{x} F(x,y)dydx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} F(x,y)dydx$

Podemos extender el teorema de Fubini [2]a regiones generales si F es un campo escalar de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, continuo en una región Ω de $\mathbb{R}^2$ determinada por $a \le x \le b$, $\phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)$, y tambien por $c \le y \le d$, $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$ entonces $\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} F(x,y)dydx = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} F(x,y)dxdy$

Ejemplo 4.2.4 *Calcular* $\int_\Omega \int |x+y|\, dA$ *si* $\Omega = [0,1] \times [0,1]$

Como $|x-y| = \begin{cases} x-y & si\ x \ge y \\ y-x & si\ x \le y \end{cases}$



entonces $\int_\Omega \int |x-y|\, dA = \int_0^1 \int_0^{\,x} (x-y)dydx + \int_0^1 \int_x^{\,1} (y-x)dydx$

$= \int_0^1 \left(xy - \frac{y^2}{2} \right) |_0^x dx + \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} - xy \right) |_x^1 dx$

$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} \right) dx + \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} |_0^1 \ = \frac{1}{3}$

Propiedad 4.2.1 *Si F y G son campos escalares $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ continuos en una region Ω de $\mathbb{R}^2$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces:*

---

[2]



Guido Fubini nacio el 19 de enero de 1879 en Venecia Italia, murio el 6 de junio en Nueva York USA. Le apodaban 'el pequeño gigante' porque tenía un cuerpo pequeño y una mente grande, aunque la conclusión del teorema de Fubini se sabía desde hacía tiempo, y se la había aplicado con éxito en varios casos, no fue probada en general hasta 1907. Los intereses de Fubini en matemáticas fueron amplios trabajo en analisis, geometría diferencial, ecuaciones diferenciales, funciones de varias variables complejas, cálculo de variaciones, donde estudió la reducción del Weierstrass integrante de un Lebesgue integral y también trabajó en la expresión de superficie integrales en términos de dos integraciones simples. Fubini También trabajó en la teoría de grupos. En particular estudió lineal y los grupos de automorfisos de funciones. Su obra más importante fue el diferencial de la geometría proyectiva, donde utiliza el cálculo diferencial absoluto

(i) $\int_\Omega\int kF(x,y)dA = k\int_\Omega\int F(x,y)dA$
(ii) $\int_\Omega\int(F(x,y)\pm G(x,y))dA=\int_\Omega\int F(x,y)dA \pm \int_\Omega\int G(x,y)dA$
(iii) $\int_\Omega\int F(x,y)dA = \int_{\Omega_1}\int F(x,y)dA + \int_{\Omega_2}\int F(x,y)dA$
Si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ *(dos regiones) y* $int(\Omega_1)\cap int(\Omega_2) = \emptyset$
(iv) Si $F(x,y) \geq G(x,y)\ \forall(x,y)\in\Omega$ *entonces*
$\int_\Omega\int F(x,y)dA \geq \int_\Omega\int G(x,y)dA$

Ejercicios sección 4.2.

1. Para la integral $\int_\Omega\int F(x,y)dA$ grafique la región de integración Ω y escriba la integral doble con sus respectivos límites.si:

   a) $\Omega = \{(x,y)|0\leq x\leq 2,\ x\leq y\leq x+1\}$
   b) $\Omega = \{(x,y)|-1\leq x\leq 1,\ 1-x^2\leq y\leq 4-x^2\}$
   c) $\Omega = \left\{(x,y)|1\leq y\leq 3, \frac{1}{y}\leq x\leq\frac{4}{y}\right\}$

2. Plantear la integral doble de $F(x,y)$ en la región Ω acotada por:

   a) $y^2 = 2x$ y $y^2 = 8-2x$
   b) $y = x^2$ y $x = y^2$
   c) $x^2+y^2\leq 1$

3. Para la integral dada dibuje la región de integración, invierta el orden y plantee la integral resultante.

   a) $\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} F(x,y)dydx$
   b) $\int_0^\pi\int_0^{Senx} F(x,y)dydx$
   c) $\int_{-1}^1\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} F(x,y)dydx$

4. Para la integral dada dibuje la región de integración, invierta el orden y plantee la integral resultante.

   a) $\int_0^1\int_y^{2-\sqrt{y}} F(x,y)dxdy$
   b) $\int_0^1\int_2^{\sqrt[3]{y}} F(x,y)dxdy$
   c) $\int_0^1\int_{e^y}^{e} F(x,y)dxdy$

5. Calcular la integral dada

a) $\int_0^1 \int_{y^2}^{y} \sqrt{xy}dxdy$
b) $\int_0^{\pi} \int_0^{y} sen(x+y)dxdy$
c) $\int_1^2 \int_0^{x-1} \frac{1}{x+y}dydx$

6. Calcular la integral dada

a) $\int_{\Omega}\int 2x+3ydA$ si Ω esta acotada por $y=x^2-4$, $y=4-x^2$
b) $\int_{\Omega}\int xydA$ si Ω esta acotada por un triángulo de vértices en $(0,0)$, $(1,1)$ y $(2,0)$
c) $\int_{\Omega}\int x^2+y^2dA$ si Ω esta acotada por $x^2+y^2=4$

7. Calcular la integral dada

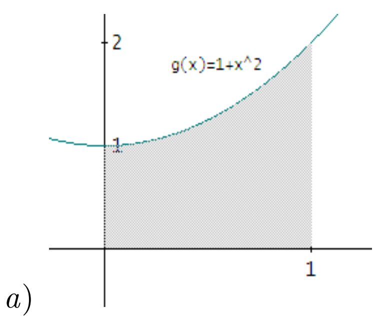
a) $\int_0^1 \int_{3y}^{3} e^{x^2}dxdy$
b) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{1} \sqrt{x^3+1}dxdy$
c) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{1} Senx^3dxdy$

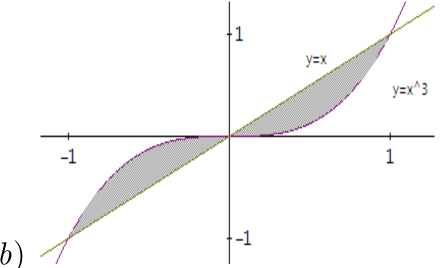
8. Suponga que $\int_{\Omega}\int xdA = 5$, $\int_{\Omega}\int ydA = -3$ y $\int_{\Omega}\int dA = 2$ y calcule

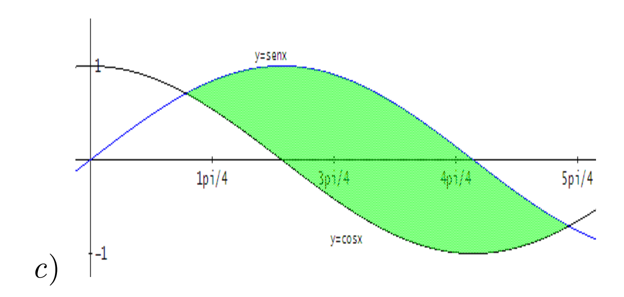
a) $\int_{\Omega}\int 5dA$
b) $\int_{\Omega}\int (x+y+1)dA$
c) $\int_{\Omega}\int (3x-2y+7)dA$

9. Calcular $\int_{\Omega}\int [[x+y]]\,dA$ si $\Omega=[0,2]\times[0,2]$. Donde $[[x+y]]$ es la parte entera de $(x+y)$

10. Utilizar una integral doble para hallar el área de la región dada.

a)


b)


c) 

11. Utilizar una integral doble para calcular el área de la región acotada por las gráficas de las curvas dadas.

   a) $y = x^{3/2}$, $y = x$
   b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$, $x = 0$ $y = 0$
   c) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = x$, $y = \sqrt{3}x$

12. Utilizar una integral doble para hallar el volumen limitado por las ecuaciones.

   a) $z = 4 - 2x^2 - y^2$, $z = 0$
   b) $z = 1 - x^2 - y^2$, $z = 1 - x$
   c) $z = 1 - x^2$, $z = 0$, $y = 0$, $y = 3$

13. Utilizando integrales dobles hallar el volumen debajo de la superficicie dada por el campo escalar F sobre la región Ω

   a) $F(x, y) = y$, Ω está acotada por un triángulo de vértices en $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$.
   b) $F(x, y) = xy$, Ω está acotada por $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = 0$
   c) $F(x, y) = 1 + x^2 + y^2$, Ω está acotada por $|x| + |y| \leq 1$

14. Utilizando integrales dobles hallar el volumen de una piramide de altura h y base cuadrada de lado l.

15. Utilice un CAS para graficar regiones de integración.

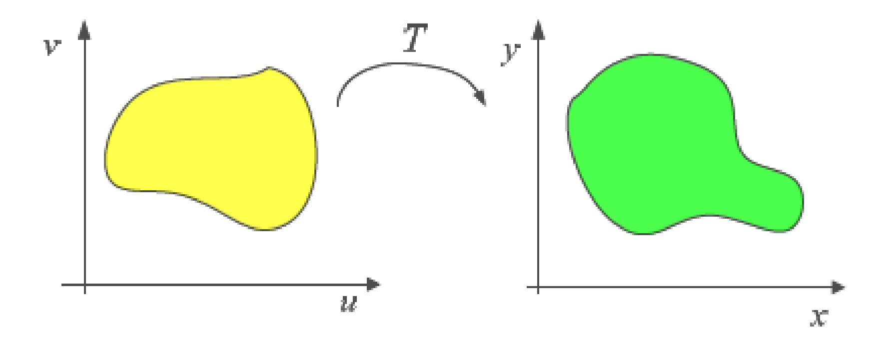
4.3. Cambio de coordenadas en integrales dobles.

Una de las tecnicas más poderosas en integrales simples es la de sustitución o cambio de variable, para integrar una función $f(x)$ continua en un intervalo $[a,b]$ se cambia la variable x por otra variable t, haciendo $x = g(t)$ donde g es una función derivable con derivada $g\prime(t)$ continua en un intervalo $[c,d]$ tal que $g([a,b]) = [c,d]$ entonces $\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt$.

El objetivo de esta sección es realizar un procedimiento analogo para integrales dobles, la integración por sustitución (o cambio de variable), el proceso resulta más complicado pues se deben cambiar ambas variables x, y por las variables u, v por ejemplo. Este cambio se realiza mediante una transformación geométrica de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. Se emplearan tecnicas que simplificaran los calculos y sera fundamental el aspecto geométrico de la nueva región de integración Ω^*, obtenida de Ω, la integral a calcular debe ser mas sencilla de calcular en Ω^* que en Ω.

Si T es un campo vectorial de $\Omega^* \subset R^2$ en $\Omega \subset R^2$ tal que $\forall(u,v) \in \Omega^*$, $T(u,v) = [T_1(u,v), T_2(u,v)] = (x,y) \in \Omega$, luego $T(\Omega^*) = \Omega$, si ademas existe T^{-1} de $\Omega \subset R^2$ en $\Omega^* \subset R^2$ tal que $\forall(x,y) \in \Omega$, $T^{-1}(x,y) = [T_1^{-1}(x,y), T_2^{-1}(x,y)] = (u,v) \in \Omega^*$, luego $T^{-1}(\Omega) = \Omega^*$.entonces T es una biyección denominada cambio de coordenadas. La transformación $T(u,v) = (x,y)$ suele escribirse como

$$T(u,v) = \begin{bmatrix} T_1(u,v) \\ T_2(u,v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



Si T es un cambio de coordenadas de $\Omega^* \subset R^2$ en $\Omega \subset R^2$ diferenciable en Ω, entonces la matriz

$$JT(u,v) = \left[\frac{\partial T(u,v)}{\partial(u,v)}\right] = \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

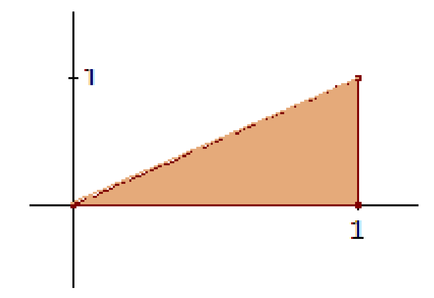
se denomina matriz jacobiana de T *y su determinante*

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

se denomina jacobiano. [3]

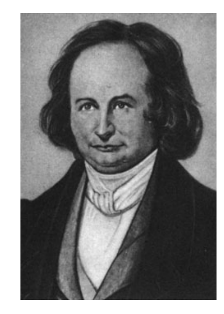
Si A_{Ω} *es el área encerrada por* Ω *y* A_{Ω^*} *es el área encerrada por* Ω^* *entonces* A_{Ω} *es proporcional a* A_{Ω^*}*, luego existe un factor de proporcionalidad* $|J| \in R^+$ *tal que* $A_{\Omega} = |J|\, A_{\Omega^*}$ *donde* J *es el jacobiano de la transformación* $T(u,v)$.

Ejemplo 4.3.1 *La función* $T(u,v) = [u+v, 2uv]$ *transforma el triángulo* Ω^* *de vértices* $(0,0)$, $(1,0)$ *y* $(1,1)$ *en una región* Ω *del plano* $\boldsymbol{xy}$*, determine la gráfica de* Ω *y halle el área de .*

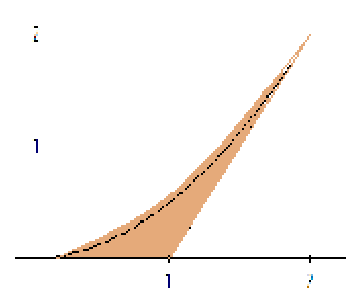


Haciendo $x = u+v$, $y = 2uv$ *hallemos las imagenes de los vértices*
$T(0,0) = (0,0)$, $T(1,0) = (1,0)$ *y* $T(1,1) = (2,2)$
como T *no es lineal debemos hallar los caminos que unen estos puntos*
$(0,0)$ *y* $(1,0)$: $u = u, \; v = 0 \Rightarrow x = u, \; y = 0$
$(1,0)$ *y* $(1,1)$: $u = 1, \; v = v \Rightarrow x = 1 + v, \; y = 2v \;\; \Rightarrow y = 2x - 2$
$(1,1)$ *y* $(0,0)$: $u = v \;\; \Rightarrow x = 2u, \; y = 2u^2 \;\; \Rightarrow y = \dfrac{x^2}{2}$


[3]



Carl Gustav Jakob Jacobi. Nacio el 10 de diciembre de 1804 en Potsdam, Prusia, actual Alemania, murio el 18 de febrero de 1851 en Berlín. Fue un matemático alemán, autor muy prolífico, contribuyó en varios campos de la matemática, principalmente en el área de las funciones elípticas, el álgebra, la teoría de números y las ecuaciones diferenciales. También se destacó en su labor pedagógica, por la que se le ha considerado el profesor más estimulante de su tiempo. Sus trabajos más relevantes se produjeron en el campo del álgebra, en el que introdujo y desarrolló el concepto de determinante, aplicándolo así mismo al estudio de las funciones de varias variables, lo que hoy en día se conoce como el jacobiano.



Para hallar el área de Ω integrando en Ω^* hallamos el jacobiano de la transformacióon

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 2u - 2v$$

Luego $A = \int_0^1 \int_0^u (2u-2v)dvdu = \int_0^1 (2uv - v^2)\,|_0^u du = \int_0^1 (2u^2 - u^2)\, du$

$= \int_0^1 u^2 du = \dfrac{u^3}{3}|_0^1 = \dfrac{1}{3}$

Sin embargo, en algunas ocasiones, se desconoce la transformación $T(u,v) = (x,y)$ más apropiada, en estos casos, se propone una transformación inversa $T^{-1}(x,y) = (u,v)$, la cual vendrá dada por las ecuaciones que limitan a la región Ω o por la función integrando.y el jacobiano se halla de la siguiente manera.

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}}$$

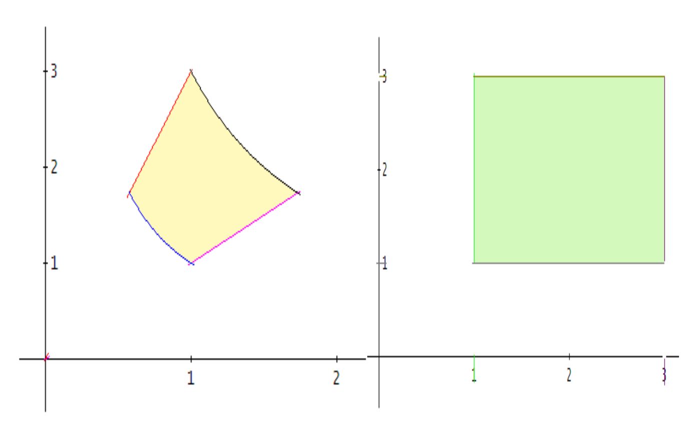
Teorema 4.3.1 *Sea A una matriz de 2×2 con $detA \neq 0$ y sea T una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ dada por $T(u,v) = A\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, entonces T transforma paralelogramos en paralelogramos y vértices en vértices. Además si $T(\Omega^*)$ es un paralelogramo Ω es un paralelogramo.*

Teorema 4.3.2 *Sea F es un campo escalar de $\Omega \subset R^2$ en $\Omega^* \subset R^2$ en variables x, y definidas en Ω. Sea T un campo vectorial de $\Omega^* \subset R^2$ en $\Omega \subset R^2$ diferenciable con jacobiano no nulo entonces*

$\int_\Omega \int F(x,y)dA = \int_{\Omega^*} \int F(T(u,v))JdA^*$

Ejemplo 4.3.2 *Utilizando un cambio de coordenadas apropiado calcular la integral $\int_\Omega \int xydxdy$ donde Ω es la región acotada por las curvas $y = x$, $y = 3x$, $xy = 1$ y $xy = 3$ en el primer cuadrante.*

Haciendo el siguiente cambio de coordenadas $u = \dfrac{y}{x}$, $v = xy$



hallamos el jacobiano inverso J^*

$$J^* = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{vmatrix} = \frac{2y}{x} = 2$$

entonces $J = \dfrac{1}{2u}$

luego $\int_\Omega \int xydxdy = \int_1^3 \int_1^3 \dfrac{v}{2u}dvdu$

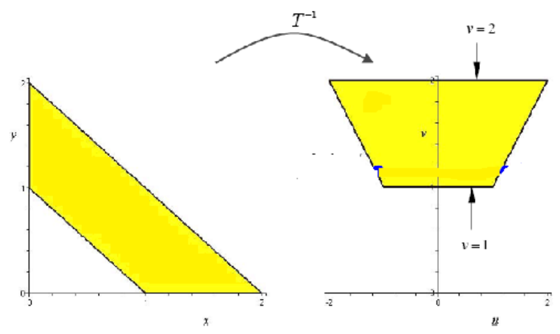
$= \int_1^3 \dfrac{v^2}{4u}|_1^3 du = \int_1^3 \dfrac{2}{u}du = 2\ln u|_1^3 = 2\ln 3$

Ejemplo 4.3.3 *Calcular* $\int_\Omega \int \cos\left(\dfrac{y-x}{y+x}\right) dA$ *en la región acotada por las rectas* $y = 0$, $x = 0$, $x + y = 1$, $x + y = 2$, *empleando un cambio de coordenadas adecuado.*

A partir del integrando $T^{-1}(x,y) = [u,v]$

$u = y - x$, $v = y + x$

entonces $\Omega^* = \{(u,v)| -v \leq u \leq v,\ 1 \leq v \leq 2\}$

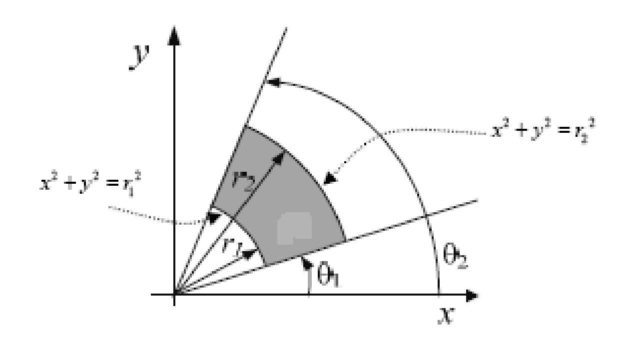


jacobiano $J = \left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$

$\int_\Omega \int \cos\left(\dfrac{y-x}{y+x}\right) dA = \int_1^2 \int_{-v}^{v} \cos\left(\dfrac{u}{v}\right) \dfrac{1}{|-2|}dudv = \dfrac{3}{2}sen1$

A continuación se describe un caso particular del cambio de variable para integrales

dobles: cambio a coordenadas polares. Considere que se desea calcular una integral doble $\int_\Omega \int F(x, y)dA$ donde Ω es una región como la mostrada en la figura



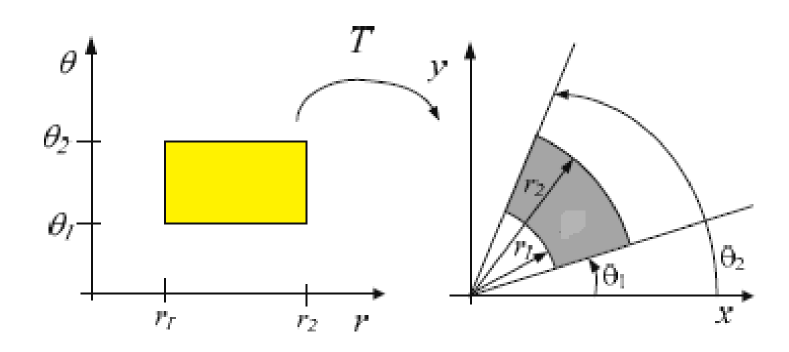
La región Ω está definida como sigue:

$\Omega = \{(x, y)|r_1 \leq x^2 + y^2 \leq r_2,\ \tan\theta_1 x \leq y \leq \tan\theta_2 x\}$

Para expresar la región Ω en coordenadas polares, denotada Ω^* es necesario hacer la trasformación de coordenadas

$T : \Omega^* \subset \mathbb{R}^2 \to \Omega \subset \mathbb{R}^2$, determinada por $T(r, \theta) = (r\cos\theta, rsen\theta) = (x, y)$

Por lo tanto la región Ω^* es $\{(r, \theta)|r_1 \leq r \leq r_2,\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$



Al emplear el teorema de cambio de variable en una integral doble, se tiene: $\int_\Omega \int F(x, y)dA = \int_{\Omega^*} \int F(r\cos\theta, rsen\theta) \left| \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dA^*$

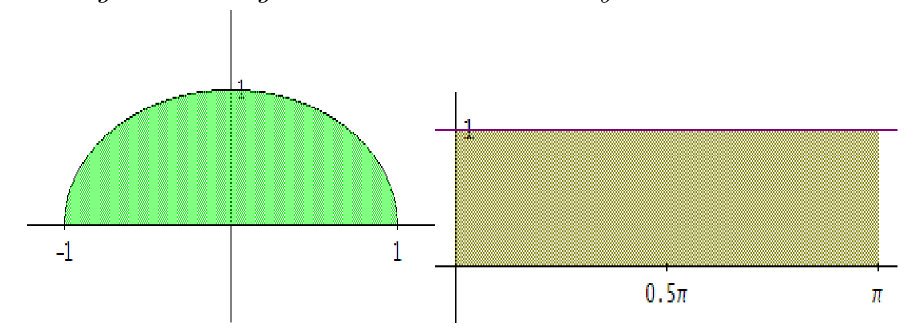
el jacobiano de esta transformación es

$$J = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -rsen\theta \\ sen\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

Teorema 4.3.3 *Cambio a coordenadas polares en integrales dobles. Sea F un campo escalar $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ continuo en una región rectangular Ω^* de $\mathbb{R}^2$ determinada por $\Omega^* = \{(r, \theta)|r_1 \leq r \leq r_2,\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$ donde $0 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$ entonces $\int_\Omega \int F(x, y)dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} F(r\cos\theta, rsen\theta)rdrd\theta$*

Ejemplo 4.3.4 *Calcular* $\int_\Omega\int\sqrt{1-x^2-y^2}dA$ *donde* $\Omega=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1,\ x\geq 0\}$

La región de integración es medio circulo y su interior

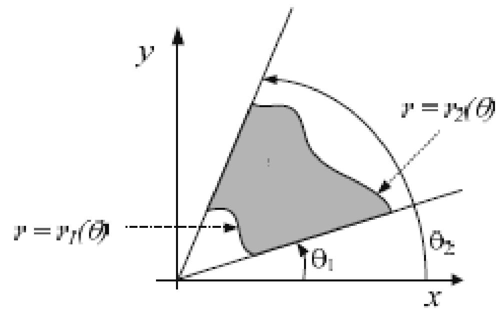


entonces los limites de integracíón son

$0\leq\theta\leq\pi,\ 0\leq r\leq 1$

luego $\int_\Omega\int\sqrt{1-x^2-y^2}dA=\int_0^\pi\int_0^1\sqrt{1-r^2}rdrd\theta=\dfrac{2\pi}{3}$

En algunas ocasiones, la región D es más general que la planteada anteriormente, tal como la región que se ilustra a continuación



Entonces, la región Ω de la figura puede expresarse en coordenadas polares como sigue: $\Omega^*=\{(r,\theta)|r_1(\theta)\leq r\leq r_2(\theta),\ \theta_1\leq\theta\leq\theta_2\}$

Al emplear la ecuación de cambio de variable resulta:

$\int_\Omega\int F(x,y)dA=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}F(r\cos\theta,rsen\theta)rdrd\theta$

No siempre circulos se envian en rectangulos.

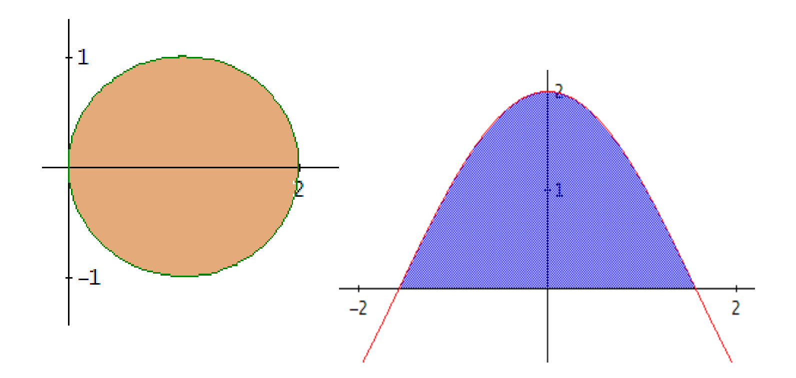
Ejemplo 4.3.5 *Calcular* $\int_\Omega\int x^2+y^2dA$ *donde* Ω *es un circulo con centro en* $(1,0)$ *y radio* 1

la ecuación del circulo es $(x-1)^2+y^2=1$

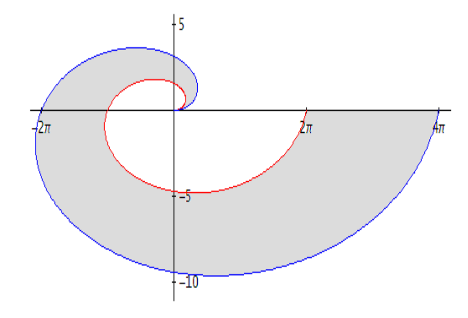
$x^2+y^2=2x$

en polares es $r^2=2r\cos\theta$

luego $-\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$ *y* $0\leq r\leq 2\cos\theta$



Ejemplo 4.3.6 *Hallar el área encerrada por las curvas* $r = \theta$, $r = 2\theta$, *para* $0 \leq \theta \leq 2\pi$



$A = \int_0^{2\pi} \int_\theta^{2\theta} r dr d\theta = \dfrac{4\pi}{3}$

Ejercicios sección 4.3.

1. Hallar el jacobiano de la transformación dada.

   a) $T(u, v) = (2u - v, u + 3v)$

   b) $T(u, v) = \left(uv, \dfrac{v}{u}\right)$

   c) $T(u, v) = (e^u \cos v, e^u senv)$

2. Para las transformaciones del numeral anterior hallar el jacobiano de la transformación inversa.

3. A partir de la transformación dada T , graficar la imagen de la región Ω^*.

   a) $T(u, v) = (2u + v, u - 2v)$, Ω^* es un triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.

   b) $T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$, $\Omega^* = \{(u, v)|0 \leq u \leq 2,\ 0 \leq v \leq 2\}$

   c) $T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$, $\Omega^* = \{(u, v)|u^2 + v^2 \leq 1\}$

4. Calcular

a) $\int_\Omega\int \frac{1}{x+y}dA$, si Ω esta acotada por $x=0$, $y=0$, $x+y=1$, $x+y=4$, utilizando la transformación $T(u,v)=[u-uv,uv]$

b) $\int_\Omega\int xydA$ donde Ω es el circulo unitario $x^2+y^2\leq 1$, utilizando la siguiente transformación $T(u,v)=(u^2-v^2,2uv)$

c) $\int_\Omega\int \frac{dxdy}{\sqrt{1+x+2y}}$ donde Ω es un cuadrado de lado 1, realizando la siguiente transformación $T(u,v)=\left(u,\frac{v}{u}\right)$

5. Utilice un cambio de coordenadas adecuado para calcular la integral doble dada

a) $\int_R (x-y)^2 Sen^2(x+y)dA$ si Ω es el paralelogramo de vértices $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$ y $(0,\pi)$

b) $\int_\Omega\int \left(\sqrt{\frac{y}{x}}-\sqrt{xy}\right)dA$si Ω esta acotada por $xy=1$, $xy=9$, $y=x$, $y=4x$

c) $\int_\Omega\int \frac{1}{1+xy}dA$ si Ω esta acotada por $xy=1$, $xy=2$, $y=x$ y $y=2x$

6. Utilice un cambio de coordenadas adecuado para calcular la integral doble dada.

a) $\int_\Omega\int (x+y+1)dA$ si Ω es el rectángulo de vértices $(0,1)$, $(1,0)$, $(3/2,1/2)$ y $(1/2,3/2)$

b) $\int_\Omega\int xydA$ si Ω está acotada por $y=2x$, $y=x$, $y=2x-2$, $y=x+1$

c) $\int_\Omega\int 2xdA$ si Ω está acotada por $y=x^2$, $y=x^2+1$, $y=1$, $y=2$

7. Utilice un cambio de coordenadas adecuado para calcular la integral doble dada.

a) $\int_\Omega\int \cos\left(\frac{x+y}{x-y}\right)dA$ si Ω está acotada por $x+y=1$, $x+y=2$, $x=0$, $y=0$

b) $\int_\Omega\int \frac{1}{xy}dA$si Ω esta acotada por $y=x^2$, $y=2x^2$, $x=y^2$, $x=2y^2$

c) $\int_\Omega\int ydA$ donde Ω es la región acotada por las curvas $y^2=4-4x$ $y^2=4+4x$ y el eje X

8. Graficar la región dada en un plano polar.

a) $\Omega=\{(x,y)|1\leq x^2+y^2\leq 4\}$

b) $\Omega=\{(x,y)|0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq x\}$

c) $\Omega=\{(x,y)|x^2+(y-1)^2\leq 1\}$

9. Evalue la integral dada utilizando coordenadas polares.

a) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2} dA$

b) $\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2} dA$

c) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dA$

10. Evalue la integral dada utilizando coordenadas polares.

a) $\int_\Omega \int xydA$ donde Ω es la intersección entre los circulos $r \leq 4Cos\theta$ y $r \leq 4Sen\theta$

b) $\int_\Omega \int xydA$ donde Ω es un circulo con centro en $(1,0)$ y tangente al eje y.

c) $\int_\Omega \int a\tan\frac{y}{x} dA$ donde $\Omega = \{(x,y)|1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$

11. Use una integral doble para hallar el área de la región.encerrada por la curva dada.

a) $r = \cos(2\theta)$

b) $r^2 = 4\cos(2\theta)$

c) $r = 2sen(3\theta)$

12. Use una integral doble y un cambio de coordenadas adecuado para hallar el área de la región.encerrada por:

a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

b) $y = x^2$, $x = y^2$

c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

13. Use coordenadas polares para hallar el volumen del sólido.

a) Debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y arriba del disco $x^2 + y^2 \leq 4$

b) Dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y fuera del cilindro $(x-1)^2 + y^2 = 1$

c) Comun a las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$

14. Calcular el área interior simultaneamente a las tres circunferencias $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 2x$ y $x^2 + y^2 = 2y$

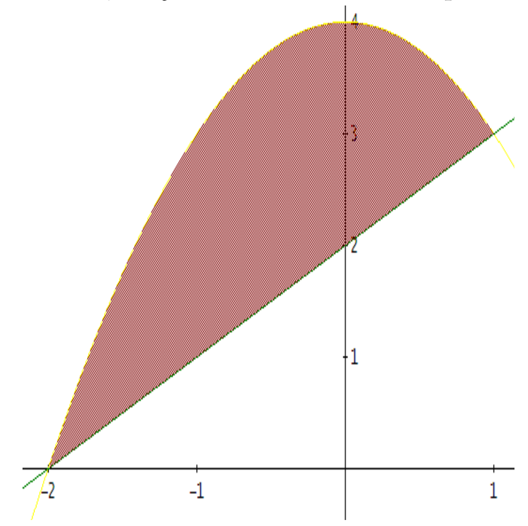
15. Utilizando un CAS construya una función que permita hallar el jacobiano de una transformación.dada.

4.4. Aplicaciones de las integrales dobles.

A continuación, se explica como determinar la masa de una figura plana no homogénea, de área determinada por Ω, para regiones donde la densidad varía en cada punto $(x, y) \in \Omega$.La densidad tiene unidades de masa por área unitaria.Para esta aplicación, considere que la función densidad ρ es continua en la región Ω.

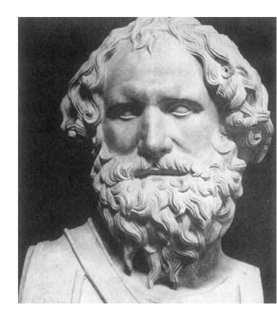
Sea Ω una región del plano xy, tal que su densidad viene dada por la función ρ de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, la cual es continua $\forall (x, y) \in \Omega$, entonces
$m = \int_\Omega \int \rho(x, y)dA$ [4]

Ejemplo 4.4.1 *Determine la masa de la placa plana limitada por las curvas $y = 4 - x^2$, $y = x + 2$, cuya densidad en cada punto (x, y) es $\rho(x, y) = x + y$*



La región Ω está definida como
$\Omega = \{(x, y)| -2 \leq x \leq 1,\ x + 2 \leq y \leq 4 - x^2\}$
Por lo tanto
$m = \int_{-2}^{1} \int_{x+2}^{4-x^2} (x + y)dydx$

4



Arquímedes de Siracusa (en griego antiguo: [redacted]) (c. 287 a. C. – c. 212 a. C.) fue un matemático griego, físico, ingeniero, inventor y astrónomo. Aunque se conocen pocos detalles de su vida, es considerado uno de los científicos más importantes de la antigüedad clásica. Entre sus avances en física se encuentran sus fundamentos en hidrostática, estática y la explicación del principio de la palanca. Generalmente, se considera a Arquímedes uno de los más grandes matemáticos de la historia, y el más grande de la antigüedad. Usó el método de agotamiento para calcular el área bajo el arco de una parábola con la sumatoria de una serie infinita, y dio una aproximación extremadamente precisa del número Pi. También definió la espiral, fórmulas para los volúmenes de las superficies de revolución y un ingenioso sistema para expresar números muy largos. Arquímedes murió durante el sitio de Siracusa (214–212 a. C.), cuando fue asesinado por un soldado romano, a pesar de las órdenes de que no debía ser dañado.

$= \int_{-2}^{1} xy + \frac{y^2}{2}|_{x+2}^{4-x^2} dx$
$= \int_{-2}^{1} \left(\frac{x^4}{2} - x^3 - \frac{11x^2}{2} + 6 \right) dx$
$= \frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4} - \frac{11x^3}{6} + 6x|_{-2}^{1}$
$= \frac{171}{20}$

En fisica se consideran otros tipos de densidad, que se pueden considerar de igual manera como en el caso anterior, por ejemplo si la densidad de carga(en unidades de carga por área) se distribuye sobre una lamina plana de forma Ω y está dada por $\sigma(x,y)$ en cada punto $(x,y) \in \Omega$, entonces la carga total q está dada por
$q = \int_{\Omega} \int \rho(x,y) dA$

Ejemplo 4.4.2 *La densidad de carga* $\sigma(x,y) = 2xy + y^2$ *en Coulombs por metro cuadrado se distribuye sobre la región rectangular* $\Omega = \{(x,y)|0 \leq x \leq 1,\ 1 \leq y \leq 2\}$. *Encuentre la carga total sobre* Ω
$q = \int_0^1 \int_1^2 2xy + y^2 dydx = \frac{23}{6}$

El momento estático o primer momento de una partícula alrededor de un eje se define como el producto de su masa y la distancia que la separa de ese eje. A continuación, se trata específicamente, los momentos estáticos de una lamina plana Ω alrededor de los ejes coordenados.

MOMENTOS ESTÁTICOS DE LAMINAS PLANAS

Sea Ω una región del plano xy, tal que su densidad viene dada por la función ρ de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, la cual es continua $\forall (x,y) \in \Omega$, entonces el momento estático alrededor del eje x, denotado por M_x, se obtiene como $M_x = \int_{\Omega} \int y\rho(x,y) dA$

Mientras que el momento estático alrededor del eje y, denotado por M_y, se calcula como $M_y = \int_{\Omega} \int x\rho(x,y) dA$

Las coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$ del centro de masa de una lamina que ocupa la región Ω y que tiene función de densidad $\rho(x,y)$ son:
$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1}{m} \int_{\Omega} \int x\rho(x,y) dA \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1}{m} \int_{\Omega} \int y\rho(x,y) dA$

Ejemplo 4.4.3 *Hallar el centro de masas de una lamina triangular de vértices en* $(0,0)$, $(a,0)$ *y* (a,a) *con* $a > 0$, *cuya densidad en cada punto (x,y) es* $\rho(x,y) = x^2 + y^2$
Hallamos primero la masa
$m = \int_0^a \int_0^x (x^2 + y^2) dydx = \frac{a^4}{3}$
ahora hallamos los primeros momentos
$M_x = \int_0^a \int_0^x y(x^2 + y^2) dydx = \frac{3a^5}{20}$

$M_y = \int_0^a \int_0^x x(x^2 + y^2)dydx = \dfrac{4a^5}{15}$

luego $(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\dfrac{4a}{5}, \dfrac{9a}{20}\right)$

El momento de inercia o segundo momento de una partícula alrededor de un eje se define como el producto de su masa y la distancia al cuadrado que la separa de ese eje. A continuación, se trata específicamente, los momentos de inercia de una lamina plana Ω alrededor de los ejes coordenados.

MOMENTOS DE INERCIA

Sea Ω una región del plano xy, tal que su densidad viene dada por la función ρ de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, la cual es continua $\forall (x, y) \in \Omega$, entonces el momento de inercia alrededor del eje x, denotado por I_x, se obtiene como $I_x = \int_\Omega \int y^2 \rho(x, y)dA$

Mientras que el momento de inercia alrededor del eje y, denotado por I_y, se calcula como $I_y = \int_\Omega \int x^2 \rho(x, y)dA$

Luego el momento de inercia respecto al origen (momento polar de inercia) denotado por I_o, se calcula como

$I_o = I_x + I_y = \int_\Omega \int (x^2 + y^2)\rho(x, y)dA$

Para un campo escalar F de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ integrable en una región Ω de $\mathbb{R}^2$ el valor promedio es la integral sobre Ω dividida entre el área de Ω.

Teorema 4.4.1 *del valor medio.*

Si F es un campo escalar de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ continuo en una región Ω de $\mathbb{R}^2$, entonces existe $(a, b) \in \Omega$ tal que

$F(a, b) = \dfrac{\int_\Omega \int F(x, y)dA}{Area(\Omega)}$

Ejemplo 4.4.4 *Halle la altura promedio del paraboloide $z = x^2 + y^2$, sobre el rectángulo $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.*

El valor de la integral de F sobre el rectangulo es

$\int_0^1 \int_0^2 (x^2 + y^2)\, dydx = \dfrac{10}{3}$

el área del rectángulo es 2

luego la altura promedio es $\dfrac{5}{3}$

Ejercicios sección 4.4.

1. Halle la masa de la lamina plana

   a) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$ y $\delta(x, y) = x^2 y$

   b) $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$ y $\delta(x, y) = k$

c) Cuadrado de lado 1 y $\delta(x,y) = |x-y|$

2. Encuentre la carga total sobre la lamina plana.

   a) Triangular de vértices $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$, $\sigma(x,y) = xy$
   b) Circular $x^2 + y^2 \leq 9$, $\sigma(x,y) = (x+y)^2$
   c) Acotada por $y = x^2$, $x = y^2$, $\sigma(x,y) = x^2 + y^2$

3. Halle el momento respecto al eje x y al eje y de las laminas del ejercicio 1

4. Halle el centro de masas de la lamina plana.

   a) $y = x^2$, $y = x$ y $\delta(x,y) = 5$
   b) $y = Sen x$, $0 \leq x \leq \pi$ y $\delta(x,y) = x + y$
   c) $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$ y $\delta(x,y) = |xy|$

5. Halle el momento polar de inercia de las laminas del ejercicio 4

6. Determine el valor promedio de:

   a) El producto de dos números, si cada uno de estos varía entre 0 y 1
   b) La suma de los cuadrados de dos números no negativos, si estos varían de tal modo que su suma nunca es mayor a 1

7. Hallar la masa de un cono circular de altura H y radio R, sabiendo que la densidad en cada punto es proporcional a su distancia al vértice del cono.

8. Una lamina homogénea tiene forma de triángulo equilatero de lado a, calcule el momento de inercia con respecto a :

   a) La altura
   b) La base.

9. Una lamina homogénea tiene forma de cuadrado de lado a, calcule el momento de inercia con respecto a :

   a) La diagonal
   b) El lado

10. Utilizando un CAS construya una función que permita hallar el centro de masas de una lamina plana dada.

4.5. Integrales triples

En esta sección consideraremos integrales triples extendiendo de forma anloga lo visto en integrales dobles para campos escalares, la región de integración ahora es un sólido, empezaremos con integrales triples sobre paralelepipedos.consecuencia de integrales dobles sobre rectangulos, luego consideraremos integrales triples sobre sólidos generales, haciendo enfasis en la proyección del solido ya que sobre la proyección trabajaremos la integral doble asociada a la integral triple.

Supongamos que Q es un paralelepipedo de $\mathbb{R}^3$ determinado por $Q = I \times J \times K$, tal que $I = [a, b]$, $J = [c, d]$ y $K = [e, f]$, entonces $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$, y sean P_x, P_y y P_z tres particiones de I, J y K respectivamente, tales que

$P_x = \{ x_0, x_1, ..., x_n\}$ con $a = x_0 < x_1 < ...< x_n = b$

$P_y = \{ y_0, y_1, ..., y_m\}$ con $c = y_0 < y_1 < ...< y_m = d$

y $P_z = \{z_0, z_1, ..., z_o\}$ con $e = z_0 < z_1 < ... < z_o = f$,

entonces $P = P_x \times P_y \times P_z$ es una partición de Q determinada por

$P = \{(x_i, y_j, z_k)|\ x_i \in P_x,\ y_j \in P_y,\ z_k \in P_z$con $i = 1,2,...,n,\ \ j = 1,2,...,m,\ k = 1, 2, ..., o\}$.

Si la partición P_x tiene $n+1$ elementos y n subintervalos de longitud $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$, la partición P_y tiene $m + 1$ elementos y m subintervalos de longitud $\triangle y_j = y_j - y_{j-1}$ y la partición P_z tiene $o+1$ elementos y o subintervalos de longitud $\triangle z_k = z_k - z_{k-1}$entonces el paralelepipedo Q queda dividido en nmo paralelepipedos Q_{ijk} de volumen $\triangle x_i \triangle y_j \triangle z_k$.

Sean F,un campo escalar escalonado definido en un paralelepipedo Q de $\mathbb{R}^3$, P una partición de Q en nmo paralelepipedos Q_{ijk} de R^3 y $F(x, y, z) = c_{ijk}$ (constante) en el interior de cada paralelepípedo Q_{ijk} entonces F es integrable en Q y su integral es igual a

$$\int\int\int_Q F(x, yz)dV = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{o} c_{ijk}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

Nota: dV es un diferencial de volumen determinado por $dV = dxdydz$ en algun orden de integración.

Sea F un campo escalar de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ definido y acotado en un paralelepipedo Q de $\mathbb{R}^3$, supongamos que existe una constante $M \in Q$ tal que $|F(x, y, z)| \leq M$, entonces existen dos campos escalares escalonados $G(x, y, z) = -M$ y $H(x, y, z) = M$ definidos en Q, tales que $G(x, y, z) \leq F(x, y, z) \leq H(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in Q$: Si existe un único número I tal que $\int\int\int_Q G(x, y, z)dV \leq I \leq \int\int\int_Q H(x, y, z)dV$ entonces F es integrable en Q y $\int\int\int_Q F(x, y, z)dV = I$.

Sea F es un campo escalar de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ definido y acotado en un paralelepipedo Q de $\mathbb{R}^3$, P una partición de Q en nmo paralelepipedos Q_{ijk}.y (x_i^*, y_j^*, z_k^*) es un punto arbitario de cada Q_{ijk} entonces

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o} F(x_i^*, y_j^*, z_k^*)\Delta x\Delta y\Delta z \text{ determina una suma de Riemman de } F \text{ sobre } Q$$

Si seleccionamos en cada paralelepipedo Q_{ijk} el punto que tenga la mayor imagen M_{ijk} obtenemos una suma superior

$U = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o} M_{ij}k\Delta x\Delta y\Delta z,$

de igual manera si en cada paralelepipedo Q_{ijk} seleccionamos el punto que tenga la menor imagen m_{ijk} obtenemos una suma inferior

$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o} m_{ijk}\Delta x\Delta y\Delta z$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o} m_{ijk}\Delta x\Delta y\Delta z \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o} F(x_i^*, y_j^*, z_k^*)\Delta x\Delta y\Delta z \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o} M_{ijk}\Delta x\Delta y\Delta z$$

por lo tanto U y L son aproximaciones de $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o} F(x_i^*, y_j^*, z_k^*)\Delta x\Delta y\Delta z$

Sea F *un campo escalar de de* $\mathbb{R}^3$ *en* $\mathbb{R}$ *definido y acotado en un paralelepipedo* Q *de* $\mathbb{R}^3$*, entonces la integral triple de* F *sobre* Q *se define como* $\int\int\int_Q F(x,y,z)dV = \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to(0,0,0)} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o} F(x_i^*, y_j^*, z_k^*)\Delta x\Delta y\Delta z$ *siempre que el límite exista, ademas si existe, decimos que* F *es integrable sobre* Q.

L*a integral triple de* F *sobre* Q *es el límite de las sumas de Riemann.*

Teorema 4.5.1 *de Fubini. Si* F *es un campo escalar de* $\mathbb{R}^3$ *en* $\mathbb{R}$ *continuo en un paralelepipedo* $Q = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ *de* $\mathbb{R}^3$*, entonces* F *es integrable en* Q *y la integral triple de* F *sobre* Q *es igual a.*

$\int\int\int_Q F(x,y,z)dV = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f F(x,y,z)dz\right)dy\right)dx$

$= \int_a^b \left(\int_e^f \left(\int_c^d F(x,y,z)dy\right)dz\right)dy$

$= \int_c^d \left(\int_a^b \left(\int_e^f F(x,y,z)dz\right)dx\right)dy$

$= \int_c^d \left(\int_e^f \left(\int_a^b F(x,y,z)dx\right)dz\right)dy$

$= \int_e^f \left(\int_a^b \left(\int_c^d F(x,y,z)dy\right)dx\right)dz$

$= \int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b F(x,y,z)dx\right)dy\right)dz$

Ejemplo 4.5.1 *Calcular* $\int_0^1\int_{-1}^1\int_1^2 xy^2z^3dzdydx$

La región de integración es un paralelepipedo

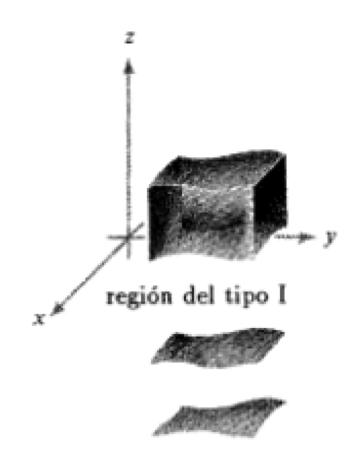
entonces $\int_0^1\int_{-1}^1\int_1^2 xy^2z^3dzdydx = \dfrac{5}{4}$

De manera analoga como se definió la integral doble sobre regiones generales, en esta sección se amplía la definición de la integral triple de un campo escalar F sobre una región solida general Ψ acotada del espacio tridimensional.

Si F es un campo escalar de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ continuo en una región solida Ψ de $\mathbb{R}^3$ entonces consideraremos la proyección Ω de Ψ en alguno de los planos cartesianos de la siguiente forma :

(i) Si Ω es la proyección de Ψ en el plano XY, entonces

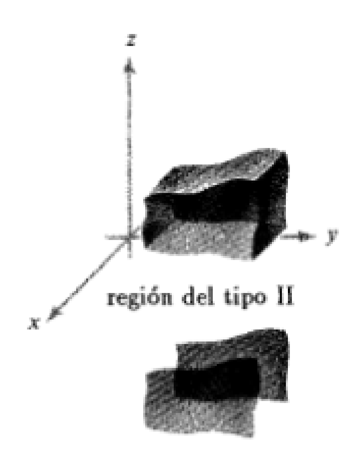
$\int\int\int_\Psi F(x,y,z)dV = \int_\Omega\int \left(\int_{G_1(x,y)}^{G_2(x,y)} F(x,y,z)dz\right) dA$ donde z varia entre las superficies $z_1 = G_1(x,y)$ y $z_2 = G_2(x,y)$



La tapa y el piso son las superficies $z_1 = G_1(x,y)$ y $z_2 = G_2(x,y)$

(ii) Si Ω es la proyección de Ψ en el plano XZ, entonces

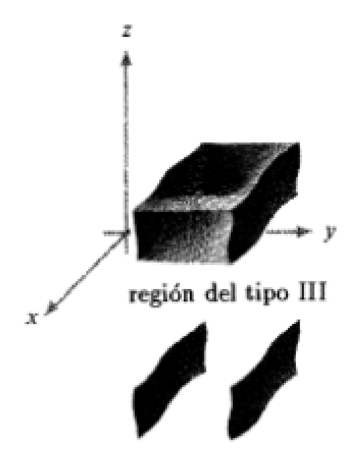
$\int\int\int_\Psi F(x,y,z)dV = \int_\Omega\int \left(\int_{G_1(x,z)}^{G_2(x,z)} F(x,y,z)dy\right) dA$ donde y varia entre las superficies $y_1 = G_1(x,z)$ y $y_2 = G_2(x,z)$



El frente y el fondo son las superficies $y_1 = G_1(x,z)$ y $y_2 = G_2(x,z)$

(iii) Si Ω es la proyección de Ψ en el plano YZ, entonces

$\int\int\int_\Psi F(x,y,z)dV = \int_\Omega\int \left(\int_{G_1(y,z)}^{G_2(y,z)} F(x,y,z)dx\right) dA$ donde x varia entre las superficies $x_1 = G_1(y,z)$ y $x_2 = G_2(y,z)$



Los lados izquierdo y derecho son las superficies $x_1 = G_1(y, z)$ y $x_2 = G_2(y, z)$.

Nota : La proyección Ω es una región de $\mathbb{R}^2$, la cual se maneja como la región de integración de una integral doble.

El volumen de una región solida Ψ de $\mathbb{R}^3$ está dado por $V = \int\int\int_{\Psi} dV$

Ejemplo 4.5.2 *Calcular* $\int\int\int_{\Psi} (x + y + z)\, dV$ *sobre el sólido acotado por las ecuaciones* $x = z^2 + y^2$, $x = 2$.
La región de integración Ψ *es una porción de parabolide y un plano*
La proyeción de Ψ *en el plano* yz *es un círculo de radio* $\sqrt{2}$
luego $\int\int\int_{\Psi} (x + y + z)\, dV = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} \int_{\sqrt{y^2+z^2}}^{2} (x + y + z) dxdzdy$
$= 3\pi$

Propiedad 4.5.1 *Si* F *y* G *son campos escalares* $\mathbb{R}^3$ *en* $\mathbb{R}$ *continuos en una region* Ψ *de* $\mathbb{R}^3$ *y* $k \in \mathbb{R}$, *entonces:*
(i) $\int\int\int_{\Psi} kF(x, y, z)dV = k \int\int\int_{\Psi} F(x, y, z)dV$
(ii) $\int\int\int_{\Psi} F(x, y, z) \pm G(x, y, z)dV = \int\int\int_{\Psi} F(x, y, z)dV \pm \int\int\int_{\Psi} G(x, y))dV$
(iii) $\int\int\int_{\Psi} F(x, y, z)dV = \int\int\int_{\Psi_1} F(x, y, z)dV + \int\int\int_{\Psi_2} F(x, y, z)dV$
Si $\Psi = \Psi_1 \cup \Psi_2$ *(dos regiones) y* $int(\Psi_1) \cap int(\Psi_2) = \emptyset$
(iv) Si $F(x, y, z) \geq G(x, y, z)\ \forall (x, y, z) \in \Psi$
entonces $\int\int\int_{\Psi} F(x, y, z)dV \geq \int\int\int_{\Psi} G(x, y, z)dV$

Ejercicios sección 4.5.

1. Calcular las inegrales dadas.

   a) $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + y + z)dzdydx$

b) $\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}(senx+\cos y+z)dzdydx$

c) $\int_1^{e}\int_1^{e}\int_1^{e}\dfrac{1}{xyz}dzdydx$

2. Grafique la región de integración Ψ acotada por las ecuaciones dadas.

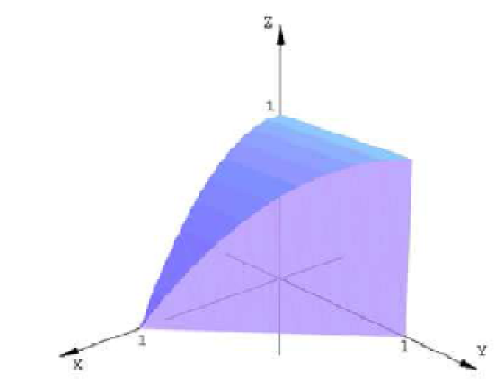
   a) $2x+3y+6z=12$ y los planos coordenados

   b) $z=x^2+y^2 \qquad z=18-x^2-y^2$

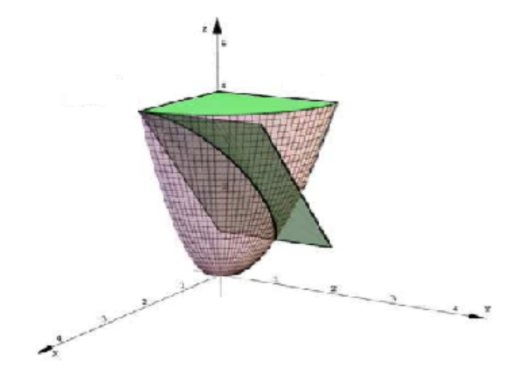
   c) $x^2+4y^2+9z^2\leq 1$

3. Plantee una integral triple de $F(x,y,z)$ sobre las regiones del numeral anterior.

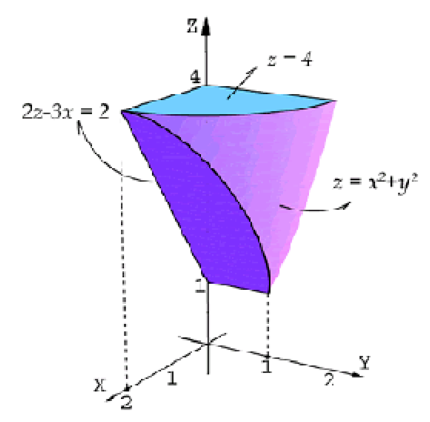
4. La gráfica representa la región de integración Ψ de $F(x,y,z)$, plantee las seis integrales iteradas.

a) 

$z=1-x^2$, $x+y=1$, $x=y=z=0$

1. b. 

$2z-3x=2$, $z=x^2+y^2$, $x=y=0$



1. c.

5. Plantee las otras cinco integrales iteradas, de la integral triple dada.

   a) $\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{4-y}(2x^2y)dzdydx$
   b) $\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-z^2}} zSenydxdzdy$
   c) $\int_{1}^{4}\int_{1}^{e^2}\int_{0}^{1/xy} Lnzdydzdxx$

6. Utilizando una integral triple calcule el volumen del sólido acotado por las ecuaciones dadas.

   a) $x^2+z^2=4$, $y=0$, $y=3$
   b) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=2$
   c) $y=1-x$, $z=\cos(\pi x/2)$, $0\leq x\leq 1$

7. Utilizando integrales triples determine el valor de c tal que el volumen del elipsoide $x^2+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$ sea igual a 20π

8. Utilizando un CAS grafique algunos regiones de integración de una integral triple.

4.6. Cambio de coordenadas en integrales triples

El objetivo de esta sección es extender a integrales triples lo que se considero en la sección 4.3 para integrales dobles, ahora se deben cambiar las variables x, y, z por las variables u, v, w por ejemplo. Este cambio se realiza mediante una transformación geométrica de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$. Se emplearan tecnicas que simplificaran los calculos y sera fundamental el aspecto geométrico de la nueva región de integración Ψ^*, obtenida de Ψ, la integral a calcular debe ser mas sencilla de calcular en Ψ^* que en Ψ.

Si T es un campo vectorial de $\Psi^* \subset R^3$ en $\Psi \subset R^3$ tal que $\forall (u,v,w) \in \Psi^*$, $T(u,v,w) = [T_1(u,v,w), T_2(u,v,w), T_3(u,v,w)] = (x,y,z) \in \Psi$, luego $T(\Psi^*) = \Psi$, si ademas existe T^{-1} de $\Psi \subset R^3$ en $\Psi^* \subset R^3$ tal que $\forall (x,y,z) \in \Psi$, $T^{-1}(x,y,z) = [T_1^{-1}(x,y,z), T_2^{-1}(x,y,z), T^{-1}(x,y,z)] = (u,v,w) \in \Psi^*$, luego $T^{-1}(\Psi) = \Psi^*$.entonces T es una biyección denominada cambio de coordenadas. La transformación $T(u,v,w) = (x,y,z)$ suele escribirse como

$$T(u,v) = \begin{bmatrix} T_1(u,v,w) \\ T_2(u,v,w) \\ T_3(u,v,w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Si T es un cambio de coordenadas de $\Psi^* \subset R^3$ en $\Psi \subset R^3$ diferenciable en Ψ, entonces la matriz

$$JT(u,v,w) = \left[\frac{\partial T(u,v,w)}{\partial(u,v,w)}\right] = \left[\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$

se denomina matriz jacobiana de T y su determinante

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

se denomina jacobiano.

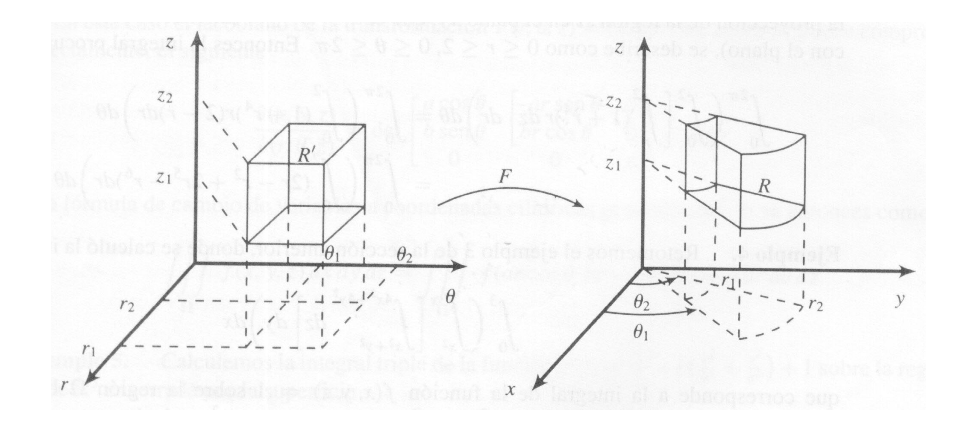
Si V_Ψ es el volumen encerrado por Ψ y V_{Ψ^*} es el volumen encerrado por Ψ^* entonces V_Ψ es proporcional a V_{Ψ^*}, luego existe un factor de proporcionalidad $|J| \in R^+$ tal que $V_\Psi = |J|\, V_{\Psi^*}$ donde J es el jacobiano de la transformación $T(u,v,w)$.

Nota : En caso de que sea mas sencillo calcular $J^* = \left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|$ entonces $J = \frac{1}{J^*}$

A continuación se describe un caso particular del cambio de coordenadas para integrales triples, las coordenadas cilindricas, las cuales son utiles en problemas que comprenden simetrias alrededor de un eje. Considere que se desea calcular una integral triple $\int\int\int_\Psi F(x,y,z)dV$ donde Ψ es una región cuya proyección Ω en el plano xy se describe convencionalmente en coordenadas polares.

La región Ψ está definida como sigue: $\Psi = \{(x,y,z)|(x,y) \in \Omega, G_1(x,y) \leq z \leq G_2(x,y)\}$

Donde Ω está dada en coordenadas polares por $\Omega = \{(r,\theta)|r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta),\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$



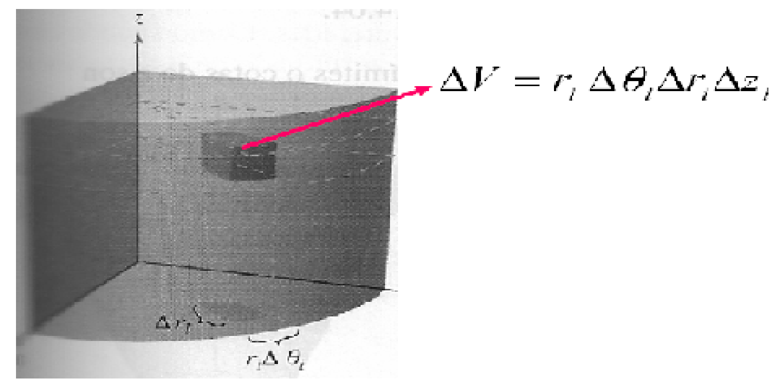
el jacobiano de esta transformación es

$$J = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -rsen\theta & 0 \\ sen\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Teorema 4.6.1 *Cambio a coordenadas cilindricas. Sea F un campo escalar $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ continuo en una región rectangular Ψ^* de $\mathbb{R}^3$ determinada por $\Psi^* = \{(r,\theta,z)|r_1 \leq r \leq r_2,\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta$ donde $0 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$ entonces*

$\int\int\int_\Psi F(x,y,z)dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1}^{r_2}\int_{G_1(r\cos\theta, rsen\theta)}^{G_2(r\cos\theta, rsen\theta)} F(r\cos\theta, rsen\theta, z)rdzdrd\theta$

Diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas



Ejemplo 4.6.1 *Utilizando coordenadas cilindricas evaluar $\int\int\int_\Psi(x^3+xy^2)dV$, donde Ψ es el sólido que se encuentra en el primer octante y debajo del paraboloide $z = 1-x^2-y^2$*

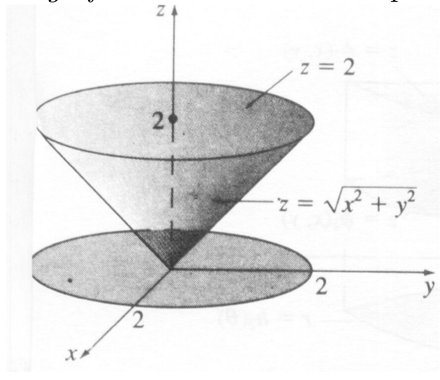
La proyección Ω del sólido Ψ en el plano xy es el circulo $x^2+y^2 = 1$, luego $\Omega = \{(r,\theta)|0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

y z varia entre el paraboloide y el plano $z = 0$, que en cilindricas es igual a $0 \leq z \leq 1-r^2$

entonces $\int\int\int_{\Psi}(x^3+xy^2)dV = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1-r^2}(r^3\cos^3\theta + r^3\cos\theta sen^2\theta)rdzd\theta dr$
$= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1-r^2} r^4\cos\theta dzd\theta dr$
$= \int_0^1\int_0^{2\pi} zr^4\cos\theta|_0^{1-r^2}d\theta dr = \int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r^2)r^4\cos\theta dzd\theta dr$
$= \int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r^2)r^4 sen\theta|_0^{2\pi}dr$
$= 0$

Ejemplo 4.6.2 *Evaluar* $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(1+(x^2+y^2)^2)dzdydx$

De acuerdo a los limites de integración la región de integración es
$\Psi = \left\{(x,y,z)| -2\le x\le 2,\ -\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2},\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2\right\}$
su gràfica està determinada por



La integral es màs sencilla en coordenadas cilindricas
luego $\Psi^* = \left\{(r,\theta,z)|0\le r\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2\right\}$
y la funciòn a integrar $F(rcos\theta, rsen\theta, z) = 1+(r^2)^2 = 1+r^4$
luego $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(1+(x^2+y^2)^2)dzdydx$
$= \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_r^2(1+r^4)rdzd\theta dr = \dfrac{184\pi}{21}$

Otro cambio de coordenadas para integrales triples son las coordenadas esféricas, las cuales son utiles en problemas donde hay simétria alrededor de un punto. Considere que se desea calcular una integral triple $\int\int\int_{\Psi}F(x,y,z)dV$ donde Ψ es una región cuya proyección Ω en el plano xy se describe convencionalmente en coordenadas polares.

La región Ψ está definida como sigue: $\Psi = \{(x,y,z)|(x,y)\in\Omega, G_1(x,y)\le z\le G_2(x,y)\}$

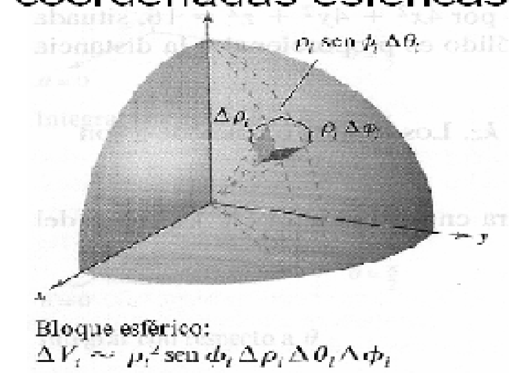
Donde Ψ^* está dada en coordenadas esfericas por $\Psi^* = \{(\rho,\theta,\phi)|\rho_1\le\rho\le\rho_2,\ \theta_1\le\theta\le\theta_2,\ \phi_1\le\phi\le\phi\}$

el jacobiano de esta transformación es

$$J = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right| = \begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\phi}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\phi}\\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\phi}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}sen\phi\cos\theta & -\rho sen\phi sen\theta & \rho\cos\phi\cos\theta\\ sen\phi sen\theta & \rho sen\phi\cos\theta & \rho\cos\phi sen\theta\\ \cos\phi & 0 & -\rho sen\phi\end{vmatrix} = \rho^2 sen\phi$$

Al emplear el teorema de cambio de variable en una integral triple se obtiene:
$\int\int\int_{\Psi} F(x,y,z)dV = \int_{\rho_1}^{\rho_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\phi_1}^{\phi_2} F(\rho sen\phi\cos\theta, \rho sen\phi sen\theta, \rho\cos\phi)Jd\phi d\theta d\rho$

Teorema 4.6.2 *Cambio a coordenadas esféricas. Sea F un campo escalar $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ continuo en una región rectangular Ψ^* de $\mathbb{R}^3$ determinada por $\Psi^* = \{(\rho,\theta,z)|\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2,\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,$ donde $0 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi_2 - \phi_1 \leq \pi,$ entonces*
$\int\int\int_{\Psi} F(x,y,z)dV = \int_{\rho_1}^{\rho_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\phi_1}^{\phi_2} F(\rho sen\phi\cos\theta, \rho sen\phi sen\theta, \rho\cos\phi)\rho^2 sen\phi d\phi d\theta d\rho$



Ejemplo 4.6.3 *Calcular $\iiint_{\Psi} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dV$ sobre la regiòn esferica Ψ, $x^2+y^2+z^2 \leq 1$*
Puesto que la frontera de Ψ es una esfera con centro en el origen, se usan coordenadas esfericas
$\Psi^* = \{(\rho,\theta,\phi)|0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}$
De esta manera
$\iiint_{\Psi} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dV = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{(\rho^2)^{3/2}}\rho^2 sen\phi\ d\rho d\theta d\phi$
$= \int_0^{\pi} sen\phi d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3} d\rho$
$= [-cos\phi]\ |_0^{\pi}(2\pi)[\frac{1}{3}e^{\rho^3}]\ |_0^1 = \dfrac{4\pi}{3}(e-1)$

Ejemplo 4.6.4 *Utilizar coordenadas esfericas para encontrar el volumen del solido que se encuentra arriba del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y debajo de la esfera $x^2+y^2+z^2 = z$*
Observese que la esfera pasa por el origen y tiene centro $(0,0,\frac{1}{2})$
Se escribe la ecuacion de la esfera en coordenadas esfericas de la forma
$\rho = \rho cos\phi$ *o* $\rho = cos\phi$
el cono se puede expresar de la forma
$\rho cos\phi = \sqrt{\rho^2\ sen^2\phi cos^2\theta +\ \rho^2 sen^2\phi\, sen^2\theta} = \rho sen\phi$
De ello resulta $sen\phi = cos\phi o\ \phi = \pi/4$
Por lo tanto, la descripcion del solido Ψ en coordenadas esfericas es

$\Psi^* = \{(\rho, \theta, \phi)|0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi/4, 0 \leq \rho \leq cos\phi \}$

Y su volumen es :

$V = \iiint_\Psi dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos\phi} \rho^2 sen\,\phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} sen\,\phi \frac{\rho^3}{3}|_0^{\cos\phi} d\phi d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^3\phi sen\,\phi}{3} d\phi d\theta$

$= \int_0^{2\pi} -\frac{\cos^4\phi}{12}|_0^{\pi/4} d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{16} d\theta$

$= \frac{\theta}{16}|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{8}$

En los siguientes ejemplos consideramos otros tipos de cambios de coordenadas en integrales triples.

Ejemplo 4.6.5 *Calcular* $\int_0^3 \int_0^4 \int_{y/2}^{y/2+1} \left(\frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3}\right) dxdydz$, *utilizando la transformaciòn* $u = \frac{2x-y}{2}$, $v = \frac{y}{2}$, $w = \frac{z}{3}$ *e integrando sobre una región apropiada en el espacio* uvw.

Trazamos la regiòn Ψ *de integración en el espacio* xyz *e identificamos sus fronteras.*

En este caso, las superficies frontera son planos.

Necesitamos encontrar la region Ψ^* *correspondiente en el espacio* uvw

Para encontralos despejamos x,y,z en terminos de u v *y* w *de las ecuaiones del problema y obtenemos:*

$x = u + v,\ y = 2u,\ z = 3w$

El jacobiano de la transformacion es

$$J = J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$\int_0^3 \int_0^4 \int_{y/2}^{(y/2)+1} \left(\frac{2x-y}{2} + \frac{z}{2}\right) dxdydz =$

$= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^1 6(u+w) dudvdw$

$= 6 \int_0^1 \int_0^2 [\frac{u^2}{2} + uw]_0^1\, dvdw$

$= 6 \int_0^1 \int_0^2 (\frac{1}{2} + w)\, dvdw$

$= 6 \int_0^1 [\frac{u}{2} + uw]_0^2\, dw$

$= 6 \int_0^1 (1 + 2w)\, dw$

$= 6[w + w^2]_0^1$

$= 6(2) = 12$

Ejemplo 4.6.6 *Calcular* $\int\int\int_{\Psi}(x+y+z)(x+y-z)(x-y-z)dV$ *donde* Ψ *es la regiòn acotada por los planos* $x+y+z=0$, $x+y-z=0$, $x-y-z=0$ *y* $2x-z=1$
realizando el siguiente cambio de coordenadas
$u=x+y+z$, $v=x+y-z$, $w=x-y-z$
el jacobiano de esta transformaciòn es
$J=\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|$
por comodidad calculamos
$J^{*}=\left|\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|=-4$
por lo tanto $J=\dfrac{1}{4}$
y $2x-z=1$ *se convierte en* $u+v+2w=1$
luego la regiòn Ψ^{*} *esta determinada por*
$u=0$, $v=0$, $w=0$ *y* $u+v+2w=2$
entonces $\int_0^2\int_0^{2-u}\int_0^{1-\frac{1}{2}(u+v)}\frac{1}{4}uvwdwdvdu=\dfrac{1}{180}$

Ejercicios sección 4.6.

1. Utilice coordenadas cilíndricas para calcular las integrales dadas.

   a) $\int\int\int_{\Psi}(x^2+y^2)dV$ si Ψ es la región limitada por el cilindro $x^2+y^2=4$ y los planos $z=-2$, $z=2$

   b) $\int\int\int_{\Psi}z^2dV$ si Ψ es la región acotada por $1\le x^2+y^2\le 4$, $z=0$ y bajo el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$

   c) $\int\int\int_{\Psi}(x+y+z)dV$ si Ψ es la región acotada por $1\le x^2+y^2\le 4$, $z=0$ y bajo el plano $z=x+2$

2. Utilice coordenadas esfericas para calcular las integrales dadas.

   a) $\int\int\int_{\Psi}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dV$ si Ψ es la región acotada superiormente por la semiesfera $x^2+y^2+z^2=1$ e inferiormente por el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$

   b) $\int\int\int_{\Psi}\dfrac{1}{1+x^2+y^2+z^2}dV$ si Ψ es la semiesfera acotada por $x^2+y^2+z^2=1$ y $z\le 0$

   c) $\int\int\int_{\Psi}zdV$ si Ψ es la región común a las esferas $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+(z-1)^2=1$

3. Utilizando un cambio de coordenadas apropiado calcular las siguientes integrales

   a) $\int\int\int_{\Psi}\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}\right)dV$ donde Ψ es la región acotada por el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

b) $\int\int\int_{\Psi} xyzdV$ si Ψ es la región que se encuentra en el primer octante acotada por $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $xy = 1$, $xy = 4$, $y = x$, $y = 5x$

c) $\int\int\int_{\Psi} xyzdV$ si Ψ es la región acotada por $xy = 1$, $xy = 2$, $xz = 1$, $xz = 2$, $yz = 1$, $yz = 2$

4. Plantear la integral dada en coordenadas cilindricas y esfericas.

a) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} F(x,y,z)dzdydx$

b) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{1-\sqrt{x^2+y^2}}^{1+\sqrt{x^2+y^2}} F(x,y,z)dzdydx$

c) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{1-z^2}}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2-z^2}} F(x,y,z)dxdydz$

5. Utilizando un cambio de coordenadas apropiado calcular el volumen del solido dado.

a) Elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

b) Acotado por $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ y los planos coordenados.

c) Acotado por la superficie $\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{6}\right)^4 = \dfrac{xyz}{48}$

6. A través de una esfera de radio 2 se perfora un hoyo cilindrico de diametro 1 . Suponiendo que el eje del cilindro pasa por el centro de la esfera, hallar el volumen del sólido que queda.

7. Encuentre el volumen del sólido acotado por los cilindros $x^2 + y^2 \leq 1$ y $x^2 + z^2 \leq 1$.

8. Sea Ψ la región en el espacio xyz definida por las siguientes desigualdades $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq xy \leq 2$, $0 \leq z \leq 1$.Evaluar $\int\int\int_{\Psi} (x^2y + 3xyz)\, dV$ aplicando la transformación $u = x$, $v = xy$, $z = 3x$, e integrando sobre una región Ψ^* apropiada en el espacio uvw.

9. Sea Ψ la región en el primer octante acotada inferiormente por el cono $\phi = \dfrac{\pi}{4}$ y superiormente por la esfera $\rho = 3$. Expresar el volumen de Ψ como una integral triple iterada en coordenadas (a) cilíndricas y (b) esféricas. Luego (c) encontrar el volumen.

10. Utilizando un CAS construya una función que permita hallar el jacobiano de una transformación.dada.

4.7. Aplicaciones de las integrales triples

A continuación, se extienden las aplicaciones fisicas sobre laminas vistas en la sección 4.4. a sólidos utilizando ahora integrales triples. Para determinar la masa de un sólido no homogéneo, de volumen determinado por Ψ, donde la densidad varía en cada punto $(x, y, z) \in \Psi$.La densidad tiene unidades de masa por unidades de volumen.Para esta aplicación, considere que la función densidad ρ es continua en la región Ψ.

Sea Ψ una región del espacio xyz, tal que su densidad viene dada por la función ρ de $\Psi \subset \mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$, la cual es continua $\forall(x, y, Z) \in \Psi$, entonces
$m = \int\int\int_\Psi \rho(x, y, z)dV$

Ejemplo 4.7.1 *Calcular la masa del sólido acotado por los paraboloides* $z = x^2 + y^2$ *y* $z = 4 - x^2 - y^2$*, cuya densidad viene dada por* ■$(x, y, z) = x + y + z + 1$
utilizando coordenadas cilindricas

$\Psi^* = \left\{(r, \theta, z) | 0 \le r \le \sqrt{2},\ 0 \le \theta \le 2\pi, r^2 \le z \le 4 - r^2\right\}$

$\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^{4-r^2} (r^2 \cos\theta + r^2 sen\theta + rz)\, dz d\theta dr$

$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \left(zr^2 \cos\theta + zr^2 sen\theta + \frac{rz^2}{2} \right) |_{r^2}^{4-r^2} d\theta dr$

$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \left(4r^2 \cos\theta + 4r^2 sen\theta + \frac{r(4-r^2)^2}{2} - 2r^4 \cos\theta - 2r^4 sen\theta - \frac{r^5}{2} \right) d\theta dr$

$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \left(4r^2 \cos\theta + 4r^2 sen\theta + \frac{16r - 8r^3 + r^5}{2} - 2r^4 \cos\theta - 2r^4 sen\theta - \frac{r^5}{2} \right) d\theta dr$

$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (4r^2 \cos\theta + 4r^2 sen\theta - 2r^4 \cos\theta - 2r^4 sen\theta + 8r - 4r^3)\, d\theta dr$

$= \int_0^{\sqrt{2}} (4r^2 sen\theta - 4r^2 \cos\theta - 2r^4 sen\theta + 2r^4 \cos\theta + 8r\theta - 4r^3\theta) |_0^{2\pi} dr$

$= \int_0^{\sqrt{2}} (16\pi r - 8\pi r^3)\, dr$

$= (8\pi r^2 - 2\pi r^4) |_0^{\sqrt{2}}$

$= 16\pi - 8\pi = 8\pi$

MOMENTOS ESTÁTICOS DE SOLIDOS

Sea Ψ una región del espacio xyz, tal que su densidad viene dada por la función ρ de $\Psi \subset \mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$, la cual es continua $\forall(x, y, z) \in \Psi$, entonces el momento estático respecto a el plano xy, denotado por M_{xy}, se obtiene como $M_{xy} = \int\int\int_\Psi z\rho(x, y, z)dV$.

Mientras que el momento estático respecto a el plano yz, denotado por M_{yz}, se calcula como $M_{yz} = \int\int\int_\Psi x\rho(x, y, z)dV$.

Y el momento estático respecto a el plano xz, denotado por M_{xz}, se calcula como $M_{xz} = \int\int\int_\Psi y\rho(x, y, z)dV$.

Las coordenadas $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ del centro de masa de un sólido que ocupa la región Ψ y que tiene función de densidad $\rho(x, y, z)$ son:

$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{1}{m} \int\int\int_\Psi x\rho(x, y, z)dV, \overline{y} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{1}{m} \int\int\int_\Psi y\rho(x, y, z)dV, \overline{z} = \frac{M_{xy}}{M} \int\int\int_\Psi z\rho(x$

Ejemplo 4.7.2 *Un sòlido esta acotado por las superficies* $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = 1$ *en el primer octante. Si su densidad en cada punto* (x, y, z) *es igual a* $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$, *hallar el centro de masas del sòlido.*

Por la forma del sólido , evaluamos las integrales en coordenadas cilindrícas

Primero hallamos la masa del sólido

$M = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 r(r)dzdrd\theta$
$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 r^2dzdrd\theta$
$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^2z|_r^1drd\theta$
$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1(r^2-r^3)drd\theta$
$= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4}\right)|_0^1d\theta$
$= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)d\theta$
$= \int_0^{\pi/2}\frac{1}{12}d\theta$
$= \frac{\theta}{12}|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{24}$

Ahora calculamos los respectivos primeros momentos

Respecto al plano xy

$M_{XY} = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 zr^2dzdrd\theta$
$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1\frac{z^2}{2}r^2|_r^1drd\theta$
$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{2}\right)drd\theta$
$= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{r^3}{6}-\frac{r^5}{10}\right)|_0^1d\theta$
$= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)d\theta$
$= \int_0^{\pi/2}\frac{1}{15}d\theta$
$= \frac{\theta}{15}|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{30}$

Respecto al plano xz

$M_{XZ} = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1(rSen\theta)r^2dzdrd\theta$
$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 r^3Sen\theta dzdrd\theta$
$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^3Sen\theta z|_r^1drd\theta$
$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1(r^3Sen\theta - r^4Sen\theta)\,drd\theta$
$= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{r^4}{4}Sen\theta-\frac{r^5}{5}Sen\theta\right)|_0^1d\theta$
$= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{Sen\theta}{4}-\frac{Sen\theta}{5}\right)d\theta$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{Sen\theta}{20} d\theta$
$= -\frac{Cos\theta}{20}|_0^{\pi/2} = \frac{1}{20}$
Respecto al plano yz
$M_{YZ} = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_r^1 (rCos\theta) r^2 dzdrd\theta$
$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_r^1 r^3 Cos\theta dZdrd\theta$
$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^3 Cos\theta z|_r^1 drd\theta$
$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r^3 Cos\theta - r^4 Cos\theta)\, drd\theta$
$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{r^4}{4} Cos\theta - \frac{r^5}{5} Cos\theta\right)|_0^1 d\theta$
$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{Cos\theta}{4} - \frac{Cos\theta}{5}\right) d\theta$
$= \int_0^{\pi/2} \frac{Cos\theta}{20} d\theta$
$= \frac{Sen\theta}{20}|_0^{\pi/2} = \frac{1}{20}$
Por lo tanto el centro de masas es igual a
$CM = \left(\frac{\frac{1}{20}}{\frac{\pi}{24}}, \frac{\frac{1}{20}}{\frac{\pi}{24}}, \frac{\frac{\pi}{30}}{\frac{\pi}{24}}\right) = \left(\frac{6}{5\pi}, \frac{6}{5\pi}, \frac{4}{5}\right)$

A continuación, se trata específicamente, los momentos de inercia de un sólido acotado por Ψ alrededor de los planos coordenados.

MOMENTOS DE INERCIA

Sea Ψ una región del espacio xyz, tal que su densidad viene dada por la función ρ de $\Psi \subset \mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$, la cual es continua $\forall (x, y, z) \in \Psi$, entonces el momento de inercia alrededor del plano xy, denotado por I_{xy}, se obtiene como $I_{xy} = \int\int\int_\Psi z^2 \rho(x, y, z) dV$

Mientras que el momento de inercia alrededor del plano yz, denotado por I_{yz}, se calcula como $I_{yz} = \int\int\int_\Psi x^2 \rho(x, y, z) dV$

Y el momento de inercia alrededor del plano xz, denotado por I_{xz}, se calcula como $I_{yz} = \int\int\int_\Psi y^2 \rho(x, y, z) dV$

Luego el momento de inercia respecto al origen (momento polar de inercia) denotado por I_o, se calcula como

$I_o = I_{xy} + I_{yz} * I_{xz} = \int_\Omega \int (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV$

Para un campo escalar F de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ integrable en una región Ψ de $\mathbb{R}^3$ el valor promedio es la integral sobre Ψ dividida entre el volumen de Ψ.

Teorema 4.7.1 *del valor medio.*

Si F es un campo escalar de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ continuo en una región Ψ de $\mathbb{R}^3$, entonces existe $(a, b, c) \in \Psi$ tal que

$F(a, b, c) = \frac{\int\int\int_\Psi F(x, y, z) dV}{Volu\,\text{men}(\Psi)}$

Ejercicios sección 4.7

1. Halle la masa del solido:

   a) Acotado por el paraboloide $z = 4x^2 + 4y^2$ si $\delta(x, y, z) = k$
   b) Prisma determinado por $x+y+z = 1$ y los planos coordenados, si $\delta(x, y, z) = xyz$
   c) Acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ y el cono $z^2 = x^2 + y^2$ si la densidad en cada punto es $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$

2. Halle los momentos respecto a los planos xy, xz, yz, de los solidos del ejercicio 1

3. Halle el centro de masas del solido:

   a) Cubo de lado a si la densidad en cada punto (x, y, z) es proporcional a la distancia a una de las caras
   b) Esfera de radio R si la densidad en cada punto (x, y, z) es proporcional a su distancia al eje z
   c) Acotado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, el plano $z = a$ $(a > 0)$ si la densidad en cada punto (x, y, z) es $\rho(x, y, z) = a$

4. Halle el momento polar de inercia de un elipsoide homogéneo de semiejes a, b y c , con masa total M.

5. Hallar la masa del sólido que se encuentra en el primer octante y esta acotado por las superficies $xy = 1$, $xy = 2$, $xz = 1$, $xz = 2$, $yz = 1$ y $yz = 2$. Si su densidad en cada punto (x, y, z) es igual a $\delta(x, y, z) = xyz$

6. Calcule el valor promedio del producto de tres números, si la suma de sus cuadrados es siempre no mayor a la unidad.

7. Utilizando un CAS construya una función que permita hallar el centro de masas de una lamina plana dada.

Ejercicios de repaso del capitulo 4
PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso, justificando su respuesta.

1. La partición de un rectángulo son rectángulos de lados $\triangle x$ y $\triangle y$.

2. Los limites de integración de la primera integral, de una integral doble siempre son numeros reales.

3. En toda integral doble se puede cambiar el orden de integración.
4. Si $F(x, y)$ es mayor o igual a cero en una región Ω, entonces la integral doble de F sobre Ω determina el volumen bajo F.
5. El jacobiano de un cambio de coordenadas no puede ser igual a 1.
6. Es posible hallar el área de una región plana utilizando integrales dobles.
7. La región de integración de una integral tiple siempre es un sólido.
8. Siempre es posible hallar el volumen de un sólido utilizando integrales triples.
9. La integral triple de la densidad sobre un sólido Ψ determina su masa.
10. El valor medio de un campo escalar $F(x, y, z)$ sobre un sólido Ψ es único.

PREGUNTAS DE SELECCIÓN MULTIPLE CON UNICA RESPUESTA

1. El área de la región que esta dentro del cardioide $r = 1 + \cos\theta$ y fuera de la circunferencia $r = 1$, esta determinada por:

A. $\int_0^{2\pi}\int_1^{1+\cos\theta} r dr d\theta$ B. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_1^{1+\cos\theta} dr d\theta$ C. $\int_0^{2\pi 2}\int_0^1 (1+\cos\theta) r dr d\theta$ D. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_1^{1+\cos\theta} r dr d\theta$

2. Si se utiliza la transformaciòn $u = xy$ y $v = xy^2$, sobre la regiòn acotada por las curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $xy^2 = 1$ y $xy^2 = 2$, la integral $\int_R\int y^2 dA$ es equivalente a:

A. $\int_1^2\int_1^2 \frac{u^2}{v} dv du$ B. $\int_1^2\int_1^2 \frac{v^3}{u^2} dv du$ C. $\int_1^2\int_1^2 \frac{v^2}{u^2} dv du$ D. $\int_1^2\int_1^2 \frac{v}{u^2} dv du$

3. Utilizando la siguiente transformación $u = xy$, $v = x^2 - y^2$la integral $\int_\Omega\int (x^2+y^2) dA$ donde Ω es la región limitada por las curvas $xy = 1, xy = 3, x^2 - y^2 = 1yx^2 - y^2 = 4$ en el primer cuadrante, es equivalente a:

A. $\int_1^3\int_1^4 \frac{1}{2(4u^2+v^2)^{1/2}} dv du$ B. $\int_1^3\int_1^4 \frac{(4u^2+v^2)^{1/2}}{2} dv du$ C. $\int_1^3\int_1^4 \frac{1}{2} dv du$ D. $\int_1^3\int_1^4 2 dv du$

4. Al cambiar el orden de integración en $\int_0^1\int_{x^2}^x F(x, y) dy dx$se obtiene:

A. $\int_{x^2}^x\int_0^1 F(x, y) dx dy$ B. $\int_0^1\int_{y^2}^y F(x, y) dx dy$ C.$\int_0^1\int_y^{y^2} F(x, y) dx dy$ D. $\int_0^1\int_y^{\sqrt{y}} F(x,$ E. $\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^y F(x, y) dx dy$

5. Utilizando coordenadas polares la integral doble $\int_\Omega\int F(x,y)dA$ donde Ω esta determinada por el circulo $x^2+(y-1)^2=1$, es igual a:

   A. $\int_0^1\int_0^{2\pi} F(r,\theta)d\theta dr$ B. $\int_0^{\pi}\int_0^1 F(r,\theta)rdrd\theta$ C. $\int_0^{\pi}\int_0^{2sen\theta} F(r,\theta)rdrd\theta$ D. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2sen\theta} F(r,\theta)rdrd\theta$

6. La integral $\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 rdzdrd\theta$representa el volumen del sólido limitado por:

   A. La esfera $x^2+y^2+z^2=\sqrt{2}$y el plano $z=2$
   B. El cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$y el plano $z=2$
   C. El cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$y la esfera $x^2+y^2+z^2=4$
   D. El paraboloide $z=x^2+y^2$y el cilindro $x^2+y^2=4$

7. El volumen del sólido acotado inferiormente por el semi-cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$y superiormente por la esfera $x^2+y^2+z^2=2z$, esta dado por la integral triple

   A. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\cos\phi}\rho^2 Sen\varphi d\rho d\varphi d\theta$ B. $\int_0^{2\pi}\int_0^{a4}\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} rdzdrd\theta$
   C. $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dzdydx$ D. $4\int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\cos\phi}\rho^2 Sen\varphi d\rho d\varphi d\theta$
   E. $\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}} dzdrd\theta$

8. El volumen de la región sólida R limitada inferiormente por el interior de la hoja superior del cono $z^2=x^2+y^2$ y superiormente por la esfera $x^2+y^2+z^2=9$ está dado por la integral:

   A. $\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^3 \rho^2 sen\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta$ B. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^3 \rho^2 sen\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta$
   C. $\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^3 \rho sen\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta$ D. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^3 \rho sen\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta$ E. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^3 \rho^2 sen\phi\ d\rho\ d\phi$
$d\theta$

9. Cuales integrales son equivalentes a la integral $\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1\int_0^{1-y} F(x,y,z)dzdydx$

   A. $\int_{\sqrt{x}}^1\int_0^1\int_0^{1-y} F(x,y,z)dzdxdy$; $\int_0^{1-y}\int_{\sqrt{x}}^1\int_0^1 F(x,y,z)dxdydz$
   B. $\int_0^1\int_0^{y^2}\int_0^{1-y} F(x,y,z)dxdydz$; $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^{(1-z)^2} F(x,y,z)dxdzdy$.
   C. $\int_0^1\int_0^{y^2}\int_0^{1-y} F(x,y,z)dzdxdy$; $\int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^{y^2} F(x,y,z)dxdzdy$
   D. $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^{y^2} F(x,y,z)dxdydz$; $\int_0^1\int^{1-\sqrt{x}}\int_0^{1-z} F(x,y,z)dydzdx$

10. La integral $\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 rdzdrd\theta$ representa el volumen del sólido acotado por:

    A. La esfera $x^2+y^2+z^2=2$ y el plano $z=2$
    B. El cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y el plano $z=2$
    C.El cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=4$
    D. El paraboloide $z=x^2+y^2$ y el cilindro $x^2+y^2=4$

PREGUNTAS DE SELECCIÓN MULTIPLE CON MULTIPLE RESPUESTA

Si 1 y 2 son correctas marque A
Si 2 y 3 son correctas marque B
Si 3 y 4 son correctas marque C
Si 2 y 4 son correctas marque D
Si 1 y 3 son correctas marque E

1. La integral $\int_\Omega\int x^2ydA$ sobre la regiòn acotada por $y=x+1$ y $y=x^2-1$ es equivalente a:

1. $\int_{-1}^{3}\int_{y-1}^{\sqrt{1+y}} x^2ydydx$ 2. $\int_{-1}^{2}\int_{y+1}^{y^2-1} x^2ydxdy$
3. $\int_{-1}^{2}\int_{x^2-1}^{x+1} x^2ydydx$ 4. $\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1+y}}^{\sqrt{1+y}} x^2ydxdy+\int_{0}^{3}\int_{y-1}^{\sqrt{1+y}} x^2ydxdy$
A. B. C. D. E.

2. Si $I=\iint\limits_R F(x,y)dydx$ y Ω esta acotada por $y=\sqrt{1-x^2}$y $y=|x|$, entonces:

1. $I=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}F(x,y)dydx$ 2. $I=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}\int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}}F(x,y)dydx+\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{x}^{\sqrt{1-x^2}}F(x,y)dydx$
3. $I=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{x}^{\sqrt{1-x^2}}F(x,y)dydx$ 4. $I=\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{-y}^{y}F(x,y)dxdy+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}F(x,y)dxdy$
A. B. C. D. E.

3. Si $F(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $R=[0,1]\times[0,1]$ y $I=\int_R\int F(x,y)dA$ entonces

A. $I=\dfrac{\pi}{4}$ B.$I=-\dfrac{\pi}{4}$ C.$I=0$ D.F no es integrable en R

4. El valor de la integral $\int_0^1\int_0^1[[x+y]]\,dydx$ (parte entera de $x+y$) es igual a:

A. 1 B. $\dfrac{1}{2}$ C. 0 D. $\dfrac{3}{2}$

5. Si $F(x,y)=\begin{cases}1 & si\,x\,es\,racional\\ 0 & si\,x\,es\,irracional\end{cases}$ y $R=[0,1]\times[0,1]$entonces:

1. F es integrable en R 2. F es continuo en R
3. $\int_0^1\int_0^1 F(x,y)dydx=1$ 4. F no es integrable en R
A. B. C. D. E.

6. Sea I la integral de $f(x,y)=\dfrac{1}{x+y}$en $S=\{(x,y)\in R^2: x+y\leq 4, x\geq 2, y\geq 0\}$, entonces:

1. $I = \int_0^2 \int_0^{4-x} \dfrac{1}{x+y} dydx$ 2. $I = \int_0^2 \int_0^{4-y} \frac{1}{x+y} dxdy$ 3. $I = \int_2^4 \int_0^{4-x} \frac{1}{x+y} dydx$ 4. $I = \int_2^4 \int_0^{4-y} \dfrac{1}{x+y} dxdy$

A. B. C. D. E.

7. La integral triple que representa el volumen del sólido acotado por las superficies $y^2 = ax$, $x^2 = ay$ $(a > 0)$, $z = 0$ y $z = x + y$ es:

A. $\int_0^a \int_{\frac{x^2}{a}}^{\sqrt{ax}} \int_0^{x+y} dzdydx$ B. $\int_{-a}^a \int_{\frac{x^2}{a}}^{\sqrt{ax}} \int_0^{x+y} dzdydx$ C. $\int_0^a \int_{\sqrt{ax}}^{\frac{x^2}{a}} \int_0^{x+y} dzdydx$

E. $\int_0^a \int_0^a \int_{\sqrt{ax}}^{\sqrt{ay}} (x+y) dzdydx$

8. La integral triple $\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \int_a^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} xdzdydx$ es equivalente a:

1. $\int_0^{2\pi} \int_0^a \int_a^{a+\sqrt{a^2-r^2}} r\cos\theta dzdrd\theta$ en coordenadas cilindricas.
2. $\int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \int_{a\sec\phi}^{2a\cos\phi} \rho sen\phi \cos\theta d\rho d\theta d\phi$ en coordenadas esfericas.
3. $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_{a\sec\phi}^{2a\cos\phi} \rho^2 sen\phi^2 \cos\theta d\rho d\phi d\theta$ en coordenadas esfericas.
4. $\int_0^a \int_0^{2\pi} \int_a^{a+\sqrt{a^2-r^2}} r\cos\theta dzd\theta dr$ en coordenadas cilindricas.

A. B. C. D. E.

9. Sea Ψ el sólido en $\mathbb{R}^3$ limitado $x^2+y^2=9$, $z=0$ y $z=\frac{\pi}{2}$, y consideremos la integral $I = \iiint_\Psi \frac{1}{9}(x^2+y^2)\cos z dxdydz$se verifica que:

1. $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{3} r^2 \cos z \ dr \ d\theta \ dz$ 2. $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{9} \frac{1}{9} r^3 \cos z \ dr \ d\theta \ dz$ 3. $I = \frac{9\pi}{2}$ 4. $I = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{3} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{9} r^3 \cos z \ dz \ dr \ d\theta$

A. B. C. D. E.

10. El volumen del sólido acotado inferiormente por el semi-cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$y superiormente por el plano $z = 1$ esta dado por la integral triple.

1.. $\int_0^1 \int_a^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \rho^2 Sen\varphi d\varphi d\theta d\rho$ 2. $\int_0^1 \int_a^{2\pi} \int_0^{14} rdzd\theta dr$ 3. $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dzdydx$ 4. $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dzdydx$

A. B. C. D. E.

PREGUNTAS ABIERTAS

1. Calcular la integral del campo escalar dado, sobre la región dada.

   a) $F(x,y) = |x+y|$ sobre el rectángulo $[-1,1]\times[-1,1]$

b) $F(x,y) = Sgn(x-y)$ sobre la región encerrada por $|x|+|y| \leq 1$

c) $F(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$ sobre la región limitada por las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$

2. Calcular la integral del campo escalar dado.

   a) $\int_0^2 \int_x^2 x\sqrt{1+y^3}dydx$

   b) $\int_0^2 \int_{y^2}^4 \sqrt{x} senx dxdy$

   c) $\int_R \int (x+y)^2 dA$, donde R es la región limitada por el circulo con centro en $(2,0)$ y tangente al eje Y

3. Para la integral $\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1+y}}^{\sqrt{1+y}} x^2ydxdy + \int_0^3 \int_{y-1}^{\sqrt{1+y}} x^2ydxdy$ dibuje la región de integración, invierta el orden y plantee la integral resultante

4. Use una sustitución adecuada para calcular $\int_R \int \sqrt{x^2-y^2}dA$ sobre la regiòn acotada por $|x|+|y| \leq 2$

5. Utilizar integrales dobles para hallar el área encerrada por las curvas

   a) $9x^2+4y^2 = 36(x+y^4)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

   b) $(x^2+y^2) = 2a^2(x^2-y^2)$

   c) $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^4 = \dfrac{x^2}{h^2}+\dfrac{y^2}{k^2}$ donde a , b, h y k son números positivos dados

6. Utilizar integrales dobles para hallar el volumen determinado por :

   a) Los planos $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, donde a, b y c son números positivos.

   b) El paraboloide $z = x^2+y^2$ sobre el anillo circular $1 \leq x^2+y^2 \leq 9$

7. La función $T(u,v) = (u^2-v^2, 2uv)$ transforma el rectángulo $R = \{(u,v)|1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq$ en una región $\overline{R}$ del plano XY

   a) Mostrar que T es uno a uno

   b) Hallar el área de $\overline{R}$

8. Hallar la masa de una lamina cuadrada de lado α , si la densidad en cada punto $P = (x,y)$ es proporcional al cuadrado de la distancia de P y el centro de la lamina, siendo en cada vértice igual a k.

9. Mostrar que la integral dada existe $\int_R \dfrac{\text{Sen}^2(x-y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dA$

10. Usando el teorema del valor medio, mostrar que $\frac{1}{6} \leq \int_R \dfrac{dA}{y-x+3} \leq \frac{1}{4}$ Donde R es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$, y $(1,0)$

11. Mostrar que $4e^5 \leq \int_R e^{x^2+y^2} dA \leq 4e^{25}$ Donde R es el rectángulo determinado por $[1,3] \times [2,4]$

12. Hallar A de modo que el volumen interior al hemisferio $z = \sqrt{16-x^2-y^2}$ y exterior al cilindro $x^2+y^2 = a^2$ sea la mitad del volumen interior al hemisferio. Sugerencia utilice coordenadas polares.

13. Hallar el área de la región acotada por las elipses $x^2+4y^2 = 4$ y $x^2+4y^2 = 16$

14. Determine el centro de masa de la placa acotada por $y = 1-|x|$ y $y = |x|-1$ si la densidad es proporcional al cuadrado de la distancia desde la recta $x+y=1$

15. Hallar la masa de una lamina determinada por $\sqrt{x}+\sqrt{y} = 1$ si su densidad en cada punto (x,y) es igual a $\delta(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

16. Sea $F(x,y)$ un campo escalar con derivadas parciales de segundo orden continuas en una región $R = [a,b] \times [c,d]$. Utilice el teorema fundamental del cálculo para demostrar que $\int_R \int \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} dA = F(a,c) - F(b,c) + F(b,d) - F(a,d)$

17. Si $R = \{(x,y)|a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ demuestre que $\int_R \int f(x)g(y)dydx = \int_a^b f(x)dx \int_c^d g(y)dy$

18. Utilice integrales triples para calcular el volumen del sólidó:

    a) Interior a las superficies $x^2+y^2+z^2 = a^2$ y $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$

    b) Interior a la superficies $x^2+y^2+z^2 = 16$ y exterior a la superficie $z = \sqrt{x^2+y^2}$

    c) Entre una esfera de radio 1, una esfera de radio 2 y bajo la hoja superior del cono $x^2+y^2 = 2z^2$

19. Utilice integrales triples y un cambio de coordenadas para calcular el volumen del sólido´acotado por $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$

20. Una piramide de altura a y de base cuadrada de lado a se coloca sobre un cubo de arista a, con las aristas alineadas. Si el cubo tiene densidad constante $d1$ y la piramide densidad constante $d2$, hallar el centro de masa de la estructura combinada.

21. Dos barras cuadradas de longitud l y sección transversal cuadrada de lado a, se unen para formar una T. Si la barra vertical tiene densidad constante $d1$ y la barra horizontal tiene densidad constante $d2$, determinar el centro de masas de la T.

22. Calcular la integral $\int\int\int_R [(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{-1/2}dV$ sobre una esfera de radio R y centro en el origen, y (a,b,c) es un punto fijo exterior a la esfera.

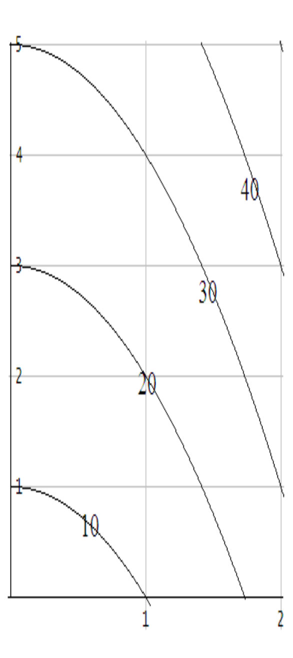
23. Suponga que la densidad de una esfera de radio R está dada por $(1+d^3)^{-1}$, donde d es la distancia al centro de la esfera. Hallar la masa total de la esfera.

24. Demostrar que $\int_0^x \int_0^v \int_0^u f(t)dtdudv = \dfrac{1}{2}$

25. Hallar el centro de masas de un paralelepípedo de lados a, b y c, homogéneo cuya masa total es M.

PROBLEMAS

1. La gráfica muestra la distribución de temperatura en grados centigrados en un cuarto de 5 metros de largo por 2 metros de ancho. Estime la temperatura promedio del cuarto.



2. Un estanque de 9 metros por 15 metros se llena con agua y la profundida se mide a inervalos de 3 metros, empezando en una esquina del estanque y se registrarón los valores en la siguiente tabla. Estime el volumen de agua en el estanque.

	0	3	6	9	12	15
0	1,0	1,0	1,5	1,8	2,0	2,4
3	1,0	1,5	1,8	2,0	2,3	2,6
6	2,0	2,0	2,2	2,4	2,6	3,0
9	2,5	2,5	2,5	2,8	3,0	3,0

3. Para una empresa concreta, la función de producción es : $F(x, y) = 100x^{0,6}y^{0,4}$ donde x, y representan el número de unidades de trabajo y de capital respectivamente. Estimar el nivel medio de producción si el número de unidades de trabajo varía entre 100 y 150; y el de unidades de capital entre 200 y 225.

4. El beneficio de una empresa por la comercialización de dos productos es $P(x, y) = 192x + 576y - x^2 - 5y^2 - 2xy - 5000$ donde x, y representan el número de unidades de cada producto. Estimar el beneficio semanal medio si x varía entre 40 y 50 unidades e y varía entre 45 y 60 unidades.

CAPÍTULO 5

INTEGRALES DE LINEA



Caminante son tus huellas
el camino, y nada más;
caminante, no hay camino,
se hace camino al andar.
ANTONIO MACHADO
"Proverbios y cantares "

En el capitulo anterior se trataron integrales dobles y triples cuya región de integración era una área o un volumen, en este capitulo se estudiarán integrales de campos escalares y vectoriales, cuya región de integración es una curvas o una trayectoria..Nuevamente se hara mas enfasis en el aspecto geometrico de la región de integración que en el cálculo de la integral y tambien en la parametrización de la curva. Para ser más precisos, trabajaremos la región de integración con funciones de variable real y valor vectorial, que sean derivables, o por lo menos que lo sean a trozos y que esta derivada sea continua (para no tener problemas con lo que vayamos a integrar). Este tipo de funciones reciben un nombre

curvas regulares a trozos. Se trataran aplicaciones geometricas sobre longitud de arco y areas, y aplicaciones fisicas sobre alambres. Por último se tratara el teorema de Green.

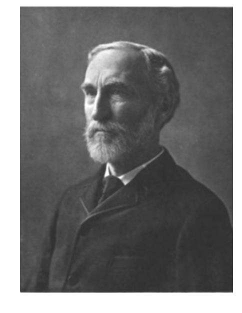
5.1. Integral de línea de campos escalares

Se iniciara la sección con el concepto de partición sobre una curva C y se sigue luego con el concepto de campo escalar escalonado sobre C.

Una integral de línea depende de dos funciones, la función F y la función α que parametriza la curva C, aunque la parametrización para una curva no es unica se debe tener cuidado con la orientación. Toda curva C parametrizada por medio de $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ tiene una orientación natural que es la que establece el sentido de recorrido de la curva conforme el punto $\alpha(t)$ se desplaza desde $\alpha(a)$ hasta $\alpha(b)$ a medida que el parámetro t aumenta desde $t = a$ hasta $t = b$.

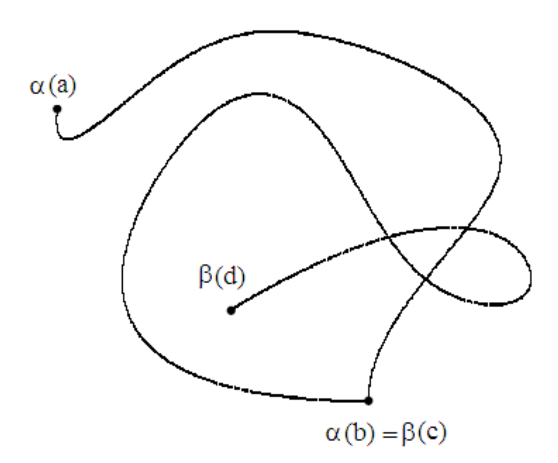
Sean C una curva regular de $\mathbb{R}^n$ contenida en D y parametrizada por medio de α ($\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$) y P una partición del intervalo $[a, b]$ tal que $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$, entonces P determina una partición de la curva C en n sub-arcos de longitudes $\triangle C_i$, si α tiene derivada continua (de clase C1) y distinta de cero en cada subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$ (para $i = 0, ..., n-1$). entonces C es una curva suave a trozos o regular y diremos que α es una parametrización suave a trozos de C. [1]

[1]



Josiah Willard Gibbs (11 de febrero, 1839 en New Haven: Connecticut, Estados Unidos – íd.28 de abril 1903) fue un químico, físico y matemático estadounidense que contribuyó de forma destacada a la fundación teórica de la termodinámica. Estudió en la Universidad de Yale, obteniendo su doctorado en 1863 con una tesis sobre los dientes de engranajes, e ingresando en la sociedad secreta Los Calavera y Huesos. En 1886 fue a vivir a Europa, donde permanció tres años: París, Berlín y Heidelberg. En 1871 fue nombrado profesor de física matemática en la Universidad de Yale. Enfocó su trabajo al estudio de la Termodinámica; y profundizó asimismo la teoría del cálculo vectorial, donde paralelamente a Heaviside opera separando la parte real y la parte vectorial del producto de dos cuaternios puros, con la idea de su empleo en física. En los cuales se consideró uno de los grandes pioneros de la actualidad

Definición 5.1.1 *Sean,* $\alpha : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *y* $\beta : [c,d] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *dos funciones suaves por trozos tales que* $\alpha(b) = \beta(c)$*, entonces la función* $\gamma = \alpha + \beta : [a,d] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$*, está determinada por* $\gamma(t) = (\alpha+\beta)(t) = \begin{cases} \alpha(t) & si\ a \le t \le b \\ \beta(t) & si\ c \le t \le d \end{cases}$ *es tambien una función suave a trozos.*



Sea F un campo escalar de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ y sea C una curva regular de $\mathbb{R}^n$ definida en D y parametrizada por medio de α $(\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n)$ se dice que F es un campo escalar escalonado en C si existe una partición P de C , tal que en cada C_i de P, F es constante.

Si F es un campo escalar de D de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ definido y acotado en una curva regular C definida en D y parametrizada por medio de α $(\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n)$ y sean ϕ y ψ dos campos escalares escalonados en C tales que $\phi(\boldsymbol{x}) \le F(\boldsymbol{x}) \le \psi(\boldsymbol{x})\, \forall \boldsymbol{x} \in D$, entonces

$\int_C \phi(\boldsymbol{x})dS \le I \le \int_C \psi(\boldsymbol{x})dS$ y $I = \int_C F(x)dS$

Si F es un campo escalar de D de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ definido y acotado en una curva regular C contenida en D y parametrizada por medio de α $(\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n)$, entonces $\sum\limits_{i=1}^{n} F(\boldsymbol{x}_i^*)\triangle S_i$ para $\boldsymbol{x}_i \in C_i$ determina una suma de Riemman de F en P.

Si F es un campo escalar de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ definido y acotado en una curva regular C definida en D y parametrizada por medio de α $(\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n)$, entonces $\int_C F(\boldsymbol{x})dS = \lim\limits_{\triangle S \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} F(\boldsymbol{x}_i^*)\triangle S_i$ se denomina integral de linea de F a lo largo de C siempre que el limite dado exista.

Notación : $\int_C F(\boldsymbol{x})dS = \int_a^b F(\alpha(t))\, \|\alpha'(t)\|\, dt$

Para $n = 2$, $\int_C F(x,y)dS = \int_a^b F(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$

Para $n = 3$, $\int_C F(x,y,z)dS = \int_a^b F(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt$

Ejemplo 5.1.1 *Calcular* $\int_C xydS$*, donde* C *es la elipse* $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

Una parametrización adecuada de la elipse es $\alpha(t) = [3\cos t, 2sent]$ *con* $0 \le t \le 2\pi$

$F(\alpha(t)) = F(3\cos t, 2sent) = 6sent\cos t$
$\alpha'(t) = [-3sent, 2\cos t]$ *y* $\|\alpha'(t)\| = 6$
luego $\int_C xydS = \int_0^{2\pi} 36sent\cos tdt$
$= 18sen^2t|_0^{2\pi} = 0$

Ejemplo 5.1.2 *Si* C *es una curva plana parametrizada por medio de* $\alpha(T) = [f(t), f(t)]$ *con* $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ *y* $f'(t)$ *continua en* $[a.b]$. *Muestre que* $\int_C (x + y^2)dS = \dfrac{5\sqrt{2}}{6}$ *cualquiera sea* f

$F(\alpha(t)) = f(t) + f^2(t)$
$\alpha'(t) = [f'(t), f'(t)]$
$dS = \alpha'(t) = \sqrt{(f'(t))^2 + (f'(t))^2}dt = f'(t)\sqrt{2}dt$
entonces $\int_C (x + y^2)dS = \int_0^1 (f(t) + f^2(t))\, f'(t)\sqrt{2}dt$
$= \sqrt{2}\left(\dfrac{(f(t))^2}{2} + \dfrac{(f(t))^3}{3}\right)|_0^1$
$= \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{5\sqrt{2}}{6}$

Propiedad 5.1.1 *Propiedades de la integral de lÍnea de campos escalares*

Sean F *y* G *dos campos escalares de* $D \subset \mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}$, *continuos en* D *y* C *es una curva regular definida en* D *y parametrizada por medio de* α $(\alpha{:}[a, b] \to \mathbb{R}^n)$.

(i) Si $\mathbf{a} = \alpha(t_0)$ *y* $\mathbf{b} = \alpha(t_n)$ *son los extremos de* C *entonces* $\int_C F(\mathbf{x})dS = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} F(\mathbf{x})dS = \int_{t_0}^{t_n} F(\alpha(t))\,\|\alpha'(t)\|\,dt$

(ii) Si C *es una curva cerrada simple con* $\alpha(t_0) = \alpha(t_n)$ *entonces* $\int_C F(\boldsymbol{x})dS = \oint_{t_0}^{t_n} F(\boldsymbol{x})dS$

(iii) Si $C = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n$, *entonces* $\int_C F(\boldsymbol{x})dS = \int_{C_1} F(\boldsymbol{x})dS + \int_{C_2} F(\boldsymbol{x})dS + ... + \int_{C_n} F(\boldsymbol{x})dS$

(iv) Si α *y* β *son dos parametrizaciones de* C, *en la misma direcciòn entonces* $\int_C F(\boldsymbol{x})dS_\alpha = \int_C F(\boldsymbol{x})dS_\beta$

(v) Si k *y* l *son números reales entonces* $\int_C (kF(\boldsymbol{x}) \pm lG(\boldsymbol{x}))dS = k\int_C F(\boldsymbol{x})dS \pm l\int_C G(\boldsymbol{x})dS$

Ejemplo 5.1.3 *Suponga que* $\int_C F(\mathbf{x})dS = 2$ *y* $\int_C G(\mathbf{x})ds = 3$ *a lo largo de una curva* C *parametrizada por medio de* α *de* $[0, 1]$ *en* $\mathbb{R}^n$. *Determine* $\int_C (F(\mathbf{x}) + G(x))\, dS$ *a lo largo de una curva parametrizada por medio de* β *de* $[0, 1]$ *en* $\mathbb{R}^n$ *si* $\beta(t) = \alpha(1 - t^2)$

$\int_C (F(\boldsymbol{x}) + G(\boldsymbol{x}))dS = \int_C (F(\beta(t)) + G(\beta(t)))\,\|\beta'(t)\|\,dt$
$= \int_C (F(\alpha(1 - t^2)) + G(\alpha(1 - t^2)))\,\left\|\alpha'(1 - t^2)(-2t)\right\|\,dt$
$= \int_C (F(\alpha(1 - t^2)) + G(\alpha(1 - t^2)))\,\left\|\alpha'(1 - t^2)\right\|\,(2t)dt$

Si $u = 1 - t^2$ *entonces* $du = (-2t)dt$
luego $\int_C (F(\boldsymbol{x}) + G(\boldsymbol{x}))dS = \int_1^0 (F(\alpha(u)) + G(\alpha(u))) \|\alpha'(u)\| du$
$= -\int_0^1 (F(\alpha(u)) + G(\alpha(u))) \|\alpha'(u)\| du$
$= -\left(\int_0^1 F(\alpha(u)) \|\alpha'(u)\| du + \int_0^1 (G(\alpha(u))) \|\alpha'(u)\| du\right)$
$= -\left(\int_C F(\boldsymbol{x})dS + \int_C G(\boldsymbol{x}))dS\right) = -(2+3) = -5$

Utilizando integrales de línea de campos escalares se pueden realizar aplicaciones geometricas como la longitud de arco y el área de una valla.

Si C es una curva regular regular a trozos de $\mathbb{R}^n$ parametrizada por medio de una función inyectiva α (α:$[a,b] \to \mathbb{R}^n$) entonces la longitud de arco S de C es igual a:
$S = \int_C dS = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$

Nota: Si α no es inyectiva la integral determina la longitud total recorrida por un objeto que sigue la trayectoria descrita por α

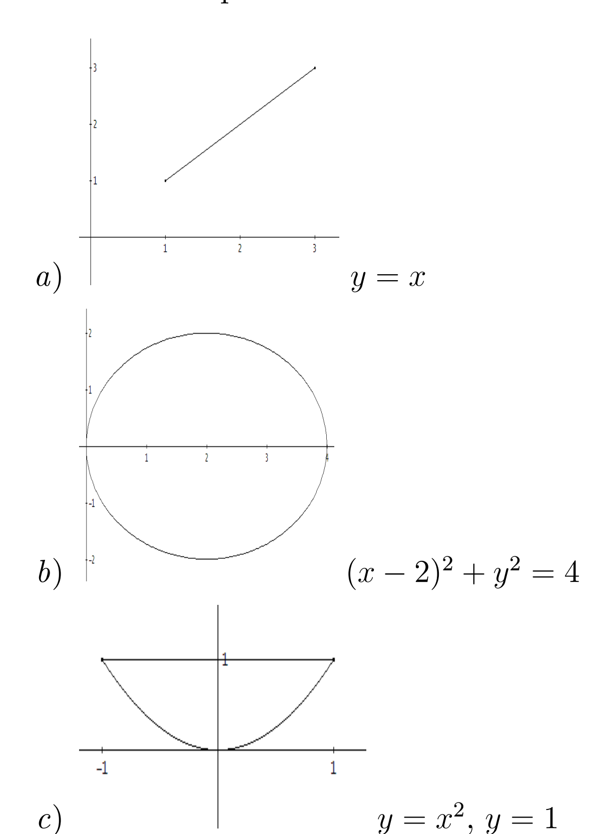
Ejemplo 5.1.4 *Hallar la longitud de la porción de hélice circular* $\alpha(t) = [\cos t, sent, t]$ *para* $0 \leq t \leq 4\pi$
Hallamos $\alpha'(t) = [-sent, \cos t, 1]$
luego $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}$
entonces $S = \int_0^{4\pi} \sqrt{2}dt = 4\sqrt{2}\pi$

Si F es un campo escalar de $D \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, continuo en D y sea C una curva regular de $\mathbb{R}^2$ contenida en D y parametrizada por medio de α ($\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$) y $F(x,y) \geq 0$ $\forall(x,y) \in C$, entonces $A = \int_C F(x,y)dS$ determina el área de una superficie de altura $F(x,y)$ y base C.

Ejemplo 5.1.5 *Hallar el área debajo de la superficie* $z = 2x - y$ *sobre la curva plana* C *parametrizada por medio de* $\alpha(t) = [t^4, t^4]$ *para* $-1 \leq t \leq 1$
$F(\alpha(t)) = F(t^4, t^4) = t^4$
y $\alpha'(t) = [4t^3, 4t^3]$
luego $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{16t^6 + 16t^6 dt} = \sqrt{32}t^3$
por simétria
$A = 2\int_0^1 t^4\sqrt{32}t^3 dt$
$= 2\sqrt{32}\int_0^1 t^7 dt$
$= 2\sqrt{32}\dfrac{t^8}{8}|_0^1$
$= \dfrac{2\sqrt{32}}{8} = \sqrt{2}$

Ejercicios sección 5.1.

1. Encuentre una parametrización de la curva dada.



2. Calcular la integral de linea dada a lo largo de la curva C parametrizada por medio de α

   a) $\int_C (2x+3y)dS$ si $\alpha(t) = [t-1, t+1]$ con $0 \leq t \leq 1$
   b) $\int_C (x-y)^2 dS$ si $\alpha(t) = [t^3, t^2]$ con $-1 \leq t \leq 1$
   c) $\int_C xy^4 dS$ si $\alpha(t) = [2Sent, 2Cost]$ con $0 \leq t \leq \pi$

3. Calcular la integral de linea dada a lo largo de la curva C.

   a) $\int_C (x+y+z)dS$ si $\alpha(t) = [t, 2t, 3t]$ con $0 \leq t \leq 1$
   b) $\int_C xyz dS$ si $\alpha(t) = [2t, 3Sent, 3Cost]$ con $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$
   c) $\int_C \dfrac{z}{x^2+y^2} dS$ si $\alpha(t) = [Cost, Sent, t]$ con $0 \leq t \leq 2\pi$

4. Calcular $\int_C (x^2+y^2)dS$ a lo largo de la curva C.dada.

   a) Segmento de recta que une a $(0,0)$ con $(2,3)$
   b) Elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

c) Triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,1)$

5. Calcular $\int_C xyzdS$ a lo largo de la curva C dada.

   a) Segmento que une a $(1,1,1)$ con $(2,3,4)$
   b) Intersección del plano $x+2y+3z=12$ y los planos coordenados.
   c) Intersección del plano $z=1$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=4$

6. Suponga que $\int_C F(\boldsymbol{x})dS = k$ si C es una curva parametrizada por medio de $\alpha : [0,1] \Rightarrow \mathbb{R}^2$ Determine $\int_C F(\boldsymbol{x})dS$ si C es una curva parametrizada por medio de β de la siguiente manera

   a) $\beta(t) = \alpha(2-t)$ con $t \in [0,1]$
   b) $\beta(t) = \alpha(3t)$ con $t \in [0,1]$
   c) $\beta(t) = \alpha(Cost)$ con $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

7. Suponga que $\int_C F(\boldsymbol{x})dS = k_1$ y $\int_C G(\boldsymbol{x})dS = k_2$, si C es una curva parametrizada por medio de $\alpha : [0,1] \Rightarrow \mathbb{R}^2$. Utilizando la parametrización $\beta(t) = \alpha(1-t)$ determine:

   a) $\int_C (F(x,y) + G(x,y))dS$
   b) $\int_C (2F(x,y) - G(x,y))dS$
   c) $\int_C (F(x,y) - 2G(x,y))dS$

8. Hallal la longitud de la curva dada C

   a) $y = x^2$ desde $(-1,1)$ hasta $(2,4)$
   b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$
   c) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

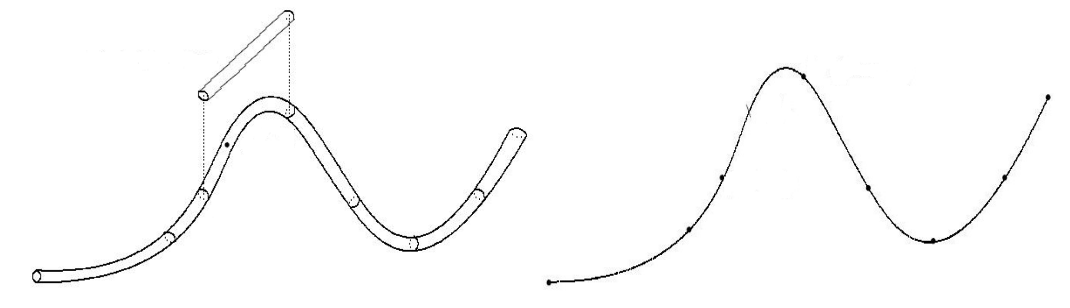
9. Hallar el área debajo de la superficie dada sobre la curva C.

   a) $z = y$ y C es el segmento de recta que une $(0,0)$ con $(1,1)$
   b) $z = xy$ y C es la porción de la parabola $y = x^2$
   c) $z = x^2 + y^2$ y C es el circulo $x^2 + y^2 = 1$

10. Utilizando un CAS grafique varias vallas (superficies sobre curvas)

5.2. Aplicaciones

A continuación, se explica como determinar la masa de un alambre no homogéneo cuya forma es la de una curva C de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, donde la densidad varía en cada punto $(x, y) \in C$ (o $(x, y, z) \in C$). La densidad tiene unidades de masa por longitud de arco. Para esta aplicación, considere que la función densidad ρ es continua en la curva C.



Alambre   Curva que representa el alambre

Si un alambre esta determinado por una curva regular C de $\mathbb{R}^2$ parametrizada por medio de α (α:$[a, b] \to \mathbb{R}^2$) y ademas su densidad en cada punto $P = (x, y)$ esta determinada por $\delta(x, y)$, entonces la masa de C es igual a $M = \int_C \delta(x, y)dS = \int_a^b \delta(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| \, dt$

De igual manera si el alambre esta determinado por una curva regular C de $\mathbb{R}^3$ parametrizada por medio de α (α:$[a, b] \to \mathbb{R}^3$) y ademas su densidad en cada punto $P = (x, y, z)$ esta determinada por $\delta(x, y, z)$, entonces la masa de C es igual a $M = \int_C \delta(x, y, z)dS = \int_a^b \delta(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| \, dt$

Ejemplo 5.2.1 *Considere un alambre de forma $\alpha(t) = [\cos(2\pi t), sen(2\pi t), t]$ con $t \in [-1, 1]$ si su densidad en cada punto (x, y, z) está determinada por $\rho(x, y, z) = 1 - z^2$, encuentre la masa del alambre.*

Hallamos $\|\alpha'(t)\|$

$\alpha'(t) = [-2\pi sen(2\pi t), 2\pi \cos(2\pi t), 1]$

y $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + 4\pi^2}$

por lo tanto

$$M = \int_{-1}^{1}(1 - t^2)\sqrt{1 + 4\pi^2}dt$$

$$= \sqrt{1 + 4\pi^2} \int_{-1}^{1}(1 - t^2)dt$$

$$= \sqrt{1 + 4\pi^2} \left(t - \frac{t^3}{3}\right) |_{-1}^{1}$$

$$= \sqrt{1 + 4\pi^2} \left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4\sqrt{1 + 4\pi^2}}{3}$$

MOMENTOS ESTÁTICOS DE CURVAS PLANAS

Si un alambre esta determinado por una curva regular C de $\mathbb{R}^2$ parametrizada por medio de α (α:$[a, b] \to \mathbb{R}^2$) y ademas su densidad en cada punto $P = (x, y)$ esta determinada por $\delta(x, y)$, entonces el momento estático alrededor del eje x, denotado por M_x, se obtiene como $M_x = \int_C y\rho(x, y)dS$

Mientras que el momento estático alrededor del eje y, denotado por M_y, se calcula como $M_y = \int_C x\rho(x,y)dS$

Las coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$ del centro de masa de un alambre determinado por una curva regular C de $\mathbb{R}^2$ parametrizada por medio de α (α:$[a,b] \to \mathbb{R}^2$) y ademas su densidad en cada punto $P = (x,y)$ esta determinada por $\delta(x,y)$, entonces

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1}{m}\int_C x\rho(x,y)dS \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1}{m}\int_C y\rho(x,y)dS$$

MOMENTOS ESTÁTICOS DE CURVAS EN EL ESPACIO

Si un alambre esta determinado por una curva regular C de $\mathbb{R}^3$ parametrizada por medio de α (α:$[a,b] \to \mathbb{R}^3$) y ademas su densidad en cada punto $P = (x,y,z)$ esta determinada por $\delta(x,y,z)$, entonces el momento estático alrededor del plano xy, denotado por M_{xy}, se obtiene como $M_{xy} = \int_C z\rho(x,y,z)dS$

Mientras que el momento estático alrededor del plano yz, denotado por M_{yz}, se calcula como $M_{yz} = \int_C x\rho(x,y,z)dS$

y el momento estático alrededor del plano xz, denotado por M_{xz}, se calcula como $M_{xz} = \int_C y\rho(x,y,z)dS$

Las coordenadas $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ del centro de masa de un alambre determinado por una curva regular C de $\mathbb{R}^3$ parametrizada por medio de α (α:$[a,b] \to \mathbb{R}^3$) y ademas su densidad en cada punto $P = (x,y,z)$ esta determinada por $\delta(x,y,z)$, entonces

$$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{1}{m}\int_C x\rho(x,y)dS \qquad \overline{y} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{1}{m}\int_C y\rho(x,y)dS \qquad \overline{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{1}{m}\int_C z\rho(x,y)d$$

Ejemplo 5.2.2 *Un alambre tiene la forma de la curva* $y = \begin{cases} x & si\ 0 \le x \le 1 \\ 2-x & si\ 1 \le x \le 2 \end{cases}$ *, si la densidad en cada punto* (x,y) *està determinada por* $\delta(x,y) = x + y$ *encuentre el centro de masas.*

Si $0 \le x \le 1$ *la curva tiene la forma de* $y = x$ *, por lo tanto*

$M_1 = \int_0^1 2t\sqrt{2}dt = 2\sqrt{2}\int_0^1 tdt = \sqrt{2}t^2 = \sqrt{2}$

Si $1 \le x \le 2$ *la curva tiene la forma de* $y = 2 - x$ *, por lo tanto*

$M_2 = \int_1^2 2\sqrt{2}dt = 2\sqrt{2}\int_0^1 dt = 2\sqrt{2}t_0^1 = 2\sqrt{2}$

Luego la masa es igual a

$M = M_1 + M_2 = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

Ahora hallamos los primeros momentos respecto a los ejes coordenados

Respecto al eje X

$M_x = \int_C y\delta(x,y)dS$

$= \int_0^1 2t^2\sqrt{2}dt + \int_1^2 (4-t^2)\sqrt{2}dt$

$= 2\sqrt{2}\int_0^1 t^2dt + \sqrt{2}\int_1^2 (4-t^2)dt$

$= 2\sqrt{2}\frac{t^3}{3}\Big|_0^1 + \sqrt{2}\left(4t - \frac{t^3}{3}\right)_1^2$

$= \frac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2}\left(8 - \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3}\right)$

$= \dfrac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2}\left(4 - \dfrac{7}{3}\right)$

Respecto al eje Y

$M_Y = \int_C x\delta(x,y)dS$

$= \int_0^1 2t^2\sqrt{2}dt + \int_1^2 2t\sqrt{2}dt$

$= 2\sqrt{2}\int_0^1 t^2dt + 2\sqrt{2}\int_1^2 tdt = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2}(4-1)$

$= \dfrac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2} = \dfrac{11\sqrt{2}}{3}$

Por lo tanto el centro de masas es igual a

$CM = (\bar{x},\bar{y}) = \left(\dfrac{M_X}{M}, \dfrac{M_Y}{M}\right) = \left(\dfrac{11}{9}, \dfrac{7}{9}\right)$

MOMENTOS DE INERCIA DE CURVAS PLANAS

Si un alambre esta determinado por una curva regular C de $\mathbb{R}^2$ parametrizada por medio de α (α:$[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$) y ademas su densidad en cada punto $P = (x,y)$ esta determinada por $\delta(x,y)$, entonces el momento de inercia alrededor del eje x, denotado por I_x, se obtiene como $I_x = \int_C y^2\rho(x,y)dS$

Mientras que el momento de inercia alrededor del eje y, denotado por I_y, se obtiene como $I_y = \int_C x^2\rho(x,y)dS$

El momento de inercia respecto a un eje L,si la distancia del eje L al punto (x,y) de C es igual a $\rho(x,y)$

$I_L = \int_C \rho^2(x,y)\delta(x,y)dS = \int_a^b \rho^2(\alpha(t))\delta(\alpha(t)\left\|\alpha'(t)\right\| dt$

MOMENTOS DE INERCIA DE CURVAS EN EL ESPACIO

Si un alambre esta determinado por una curva regular C de $\mathbb{R}^3$ parametrizada por medio de α (α:$[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^3$) y ademas su densidad en cada punto $P = (x,y,z)$ esta determinada por $\delta(x,y,z)$, entonces el momento de inercia alrededor del plano xy, denotado por I_{xy}, se obtiene como $I_{xy} = \int_C z^2\rho(x,y,z)dS$

Mientras que el momento de inercia alrededor del plano yz, denotado por I_{yz}, se obtiene como $I_{yz} = \int_C x^2\rho(x,y,z)dS$

y el momento de inercia alrededor del plano xz, denotado por I_{xz}, se obtiene como $I_{xz} = \int_C y^2\rho(x,y,z)dS$

El momento de inercia respecto a un eje L,si la distancia del eje L al punto (x,y,z) de C es igual a $\rho(x,y,z)$

$I_L = \int_C \rho^2(x,y,z)\delta(x,y,z)dS = \int_a^b \rho^2(\alpha(t))\delta(\alpha(t)\left\|\alpha'(t)\right\| dt$

Para un campo escalar F de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ integrable en una curva C de $\mathbb{R}^n$, el valor promedio es la integral sobre C dividida entre la longitud de C.

Teorema 5.2.1 *del valor medio.*

Si F es un campo escalar de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ definido y acotado en una curva regular C de $\mathbb{R}^n$ contenida en D y parametrizada por medio de α (α:$[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$), entonces existe $a \in C$ tal que

$$F(a) = \frac{\int_C F(x)dS}{Longitud(C)}$$

Ejercicios secciòn 5.2.

1. Halle la masa del alambre determinado por la curva dada C.
   a) C: $x^2 + y^2 = 1$ con densidad $\delta(x, y) = x + y$
   b) C: $y = x^2$, para $-1 \leq x \leq 2$ con densidad $\delta(x, y) = xy$
   c) C: triangulo de vèrtices en $(0, 0)$, $(1, 0)$ y (0,1), con densidad $\delta(x, y) = k$
2. Halle la masa del alambre determinado por la curva dada C.
   a) C: Intersecciòn entre el plano $z = 1$ y $z = x^2 + y^2$, con densidad $\delta(x, y, z) = z$
   b) C: Intersecciòn entre el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $x + z = 4$, con densidad $\delta(x, y, z) = y$
   c) C: intersecciòn entre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 0$, con densidad $\delta(x, y) = x^2$
3. Halle el centro de masas del alambre determinado por la curva dada C.
   a) $C : x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$ si la densidad en cada punto (x, y) es igual a $|x| + |y|$
   b) $C : x^2 + y^2 = 1\,, y \geq 0$ si la densidad en cada punto es proporcional a la distancia a la recta $y = 1$
   c) $C : |x| + |y| = 1$ si es homogéneo
4. Halle el centro de masas del alambre determinado por la curva dada C.
   a) C : Intersecciòn entre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 2$, con densidad $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$
   b) C: Intersecciòn entre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, para $z > 0$, con densidad $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
   c) C: Intersección entre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 1$, con densidad $\delta(x, y, z) = z$
5. Halle el momento de inercia del alambre del ejercicio:
   a) 1.a respecto al eje x
   b) 1.b respecto al eje y
   c) 1.c. respecto a el origen

6. Halle el momento de inercia del alambre del ejercicio:

   a) 2.a respecto al plano xy

   b) 2.b. respecto al plano xz

   c) 2.c. respecto al plano yz

7. Hallar el valor promedio del campo escalar dado a lo largo de la curva C

   a) $F(x,y) = x + y$ y C es el segmento que une a $(0,0)$ con $(1,2)$

   b) $F(x,y) = xy$ y C es la porciòn de curva $y = senx$ para $0 \leq x \leq \pi$

   c) $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ y C es la hèlice $\alpha(t) = [\cos t, sent, t]$

8. Utilizando un CAS encuentre el centro de masas de un alambre determinado por una curva plana.

5.3. Integral de lìnea de campos vectoriales.

Si $\mathbb{F}$ es un campo vectorial de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, continuo en D y sea C una curva regular de $\mathbb{R}^n$ contenida en D y parametrizada por medio de α (α:$[a,b] \to \mathbb{R}^n$), entonces
$\int_C \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\alpha = \int_C \mathbb{F}(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t)dt$

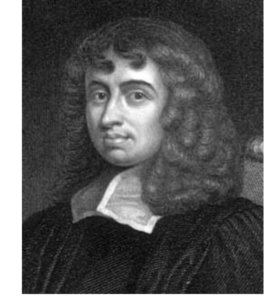
Notación 5 *Para* $n = 2$, $\int_C \mathbb{F}(x,y)d\alpha = \int_a^b \mathbb{F}(x(t), y(t))(x'(t), y'(t))dt$

Para $n = 3$, $\int_C \mathbb{F}(x,y,z)d\alpha = \int_a^b \mathbb{F}(x(t), y(t), z(t))(x'(t), y'(t), z'(t))dt$

Aplicando la regla de Barrow [2] si $g(t) = \mathbb{F}(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t)$,
$\int_C \mathbb{F}(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t)dt = \int_a^b g(t)dt = G(b) - G(a)$

---

[2]



Isaac Barrow (Londres, 1630 - id., 4 de mayo,1677) fue un teólogo, profesor y matemático inglés al que históricamente se le ha dado menos mérito en su papel en el desarrollo del cálculo moderno. Fue profesor de matemáticas en la Universidad de Cambridge hasta 1669, en que abandonó la cátedra para dedicarse a la enseñanza de la teología.En concreto, en su trabajo respecto a la tangente; por ejemplo, Barrow es famoso por haber sido el primero en calcular las tangentes en la curva de Kappa. Isaac Newton fue discípulo de Barrow. Sus trabajos son fundamento del cálculo infinitesimal. Enunció la relación recíproca entre la diferencial y la integral, y editó diversas obras de antiguos matemáticos.

Propiedad 5.3.1 *Si $\mathbb{F}$ y $\mathbb{G}$ son campos vectoriales de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, continuos en D y si C es una curva regular de $\mathbb{R}^n$ contenida en D y parametrizada por medio de α ($\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$), entonces*

(i) Si $\mathbf{a} = \alpha(t_0)$ y $\mathbf{b} = \alpha(t_n)$ son los extremos de C entonces $\int_C \mathbb{F}(\mathbf{x})d\alpha = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbb{F}(\mathbf{x})d\alpha = \int_{t_0}^{t_n} \mathbb{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)dt$

(ii) Si C es una curva cerrada simple con $\alpha(t_0) = \alpha(t_n)$ entonces $\int_C \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\alpha = \oint_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\alpha$

(iii) Si $C = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n$, entonces $\int_C \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\alpha = \int_{C_1} \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\alpha + \int_{C_2} \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\alpha + ... + \int_{C_n} \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\alpha$

(iv) Si α y β son dos parametrizaciones de C, en la misma direcciòn entonces $\int_C \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\alpha = \int_C \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\beta$

(v) Si k y l son números reales entonces $\int_C (k\mathbb{F}(\boldsymbol{x}) \pm l\mathbb{G}(\boldsymbol{x}))d\alpha = k\int_C \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\alpha \pm l\int_C \mathbb{G}(\boldsymbol{x})d\alpha$

(vi) Si $\mathbb{F}(\mathbf{x}) = [F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), ..., F_n(\mathbf{x})]$ y $d\alpha = [d\alpha_1, d\alpha_2, ..., d\alpha_n]$ entonces

$$\int_C \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\alpha = \sum_{i=1}^{n} \int_C F_i(x)d\alpha_i = \int_C F_1(\boldsymbol{x})d\alpha_1 + F_2(\boldsymbol{x})d\alpha_2 + ... + F_n(\boldsymbol{x})d\alpha_n$$

Ejemplo 5.3.1 *Calcular la integral de lìnea $\int_C [x,y]\, d\alpha$, a lo largo de la curva C determinada por $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$*

Parametrizamos la curva C de la siguiente forma

$x = \cos^3 t$, $y = sen^3 t$ *con* $0 \leq t \leq 2\pi$ *(hipocicloide)*

luego $\alpha(t) = [\cos^3 t, sen^3 t]$

y $\alpha'(t) = [-3\cos^2 t sent, 3sen^2 t \cos t]$

entonces

$\int_C \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\alpha = \int_0^{2\pi} (Cos^3 t, Sen^3 t) \bullet (-3Cos^2 t Sent, 3Sen^2 t Cost)\, dt$

$= \int_0^{2\pi} (-3Cos^5 t sent + 3Sen^5 t \cos t)\, dt$

$$= \left(\frac{\cos^6 t}{2} + \frac{sen^6 t}{2} \right)_0^{2\pi} = 0$$

Ejercicios secciòn 5.3.

1. Calcular la integral de linea dada a lo largo de la curva C.

   a) $\int_C (x+y, x-y)\, d\alpha$, si C està determinada por $\alpha(t) = [aCost, bSent]$ con $0 \leq t \leq 2\pi$

   b) $\int_C (x, y+2)\, d\alpha$, si C està determinada por $\alpha(t) = [t - Sent, 1 - Cost]$ con $0 \leq t \leq 2\pi$

   c) $\int_C (x-y, x^2y^3)\, d\alpha$, si C està determinada por $\alpha(t) = [t, at^b]$ con $0 \leq t \leq 1$, $a > 0$, $b > 0$

2. Calcular la integral de linea dada a lo largo de la curva C.

a) $\int_C (x, y, z)\, d\alpha$, si C està determinada por $\alpha(t) = [t, t^2, t^3]$ con $0 \le t \le 2$

b) $\int_C (xy, y + z, x)\, d\alpha$, si C està determinada por $\alpha(t) = [e^t, e^{-t}, e^{2t}]$ con $0 \le t \le 1$

3. Calcular la integral de linea dada a lo largo de la curva C.

a) $\int_C xydy$, si C està determinada por $\alpha(t) = [t, t^2]$ con $0 \le t \le 1$

b) $\int_C (x + y)dz$, si C està determinada por $\alpha(t) = [\cos t, sent, t]$ con $0 \le t \le 2\pi$

c) $\int_C zdx + xdy + ydz$, si C està determinada por $\alpha(t) = [t^3, t^2, t]$ con $0 \le t \le 1$

4. Calcular la integral de linea dada a lo largo de la curva C.

a) $\int_C [x^2 - 2xy, y^2 - 2xy]\, d\alpha$, si C està determinada por $y = x^2$ desde $(-1, 1)$ hasta $(2, 4)$

b) $\int_C [x + y, x - y]\, d\alpha$, si C està determinada por $|x| + |y| = 1$

c) $\int_C [y, x]\, d\alpha$, si C està determinada por el triàngulo de vèrtices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$

5. Calcular la integral de linea dada a lo largo de la curva C.

a) $\int_C [2xy, 3yz, 4xz]\, d\alpha$, si C està determinada por el segmento de recta desde $(1, 0, 2)$ hasta $(3, 4, 1)$

b) $\int_C [x, y, z]\, d\alpha$, si C està determinada por la curva intersecciòn entre el cilindro $x^2 + z^2 = 1$ y el plano $x + y = 1$

c) $\int_C [y, z, x]\, d\alpha$, si C està determinada por la curva intersecciòn entre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$ y el plano $x + y = 2$

6. Con las gràficas del campo vectorial $\mathbb{F}$ y de la curva C, determine si la integral de lìnea de $\mathbb{F}$ sobre C es positiva, negativa o cero.

a) $\mathbb{F}(x, y) = [x - y, x + y]$ y C esta determinada por $x^2 + y^2 = 4$

b) $\mathbb{F}(x, y) = \left[xy, \dfrac{x}{y}\right]$ y C esta determinada por $y = senx$ para $0 \le x \le \pi$

c) $\mathbb{F}(x, y) = \left[\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right]$ y C esta determinada por $x = y$ para $-1 \le y \le 5$ OJO

7. Utilizando un CAS grafique un campo vectorial $\mathbb{F}$ y una curva C, para estimar el signo de la integral de lìnea.

5.4. Trabajo, flujo y circulación.

Algunas aplicaciones fisicas estan determinadas por vectores, por ejemplo el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbb{F}$ para mover una particula a lo largo de una curva C de $\mathbb{R}^n$ regular a trozos y parametrizada por medio de α esta determinado por

$$W = \int_C \mathbb{F}(\boldsymbol{x}) \bullet \mathbb{T} dS = \int_a^b \mathbb{F}(\alpha(t)) \bullet \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} dt = \int_a^b \mathbb{F}(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t) dt$$

donde $\mathbb{T}(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ es un vector tangente unitario a C que representa la dirección en la cual se aplica la fuerza. [3]

Ejemplo 5.4.1 *Demuestre que el trabajo efectuado por el campo de fuerzas* $\mathbb{F}(x, y)) = (y, x)$ *para mover una particula desde* $(0, 0)$ *hasta* $(1, 1)$ *sobre cuaquier trayectoria de la forma* $\alpha(t) = [t^n, t]$*, siempre es igual a 1.*

$\alpha(t) = [t^n, t]$ y $\alpha'(t) = [nt^{n-1}, 1]$

$\mathbb{F}(\alpha(t)) = (t^n, t)$

$W = \int_0^1 (t^n, t) \bullet [1, nt^{n-1}] dt$

$= \int_0^1 (t^n + nt^n)\, dt = \int_0^1 (n + 1)t^n dt$

$= t^{n+1}|_0^1 = 1$

Tambien se pueden usar integrales de línea para determina la razón a la que un fluido fluye a traves de una curva.

Suponga que una región del plano ol del espacio esta ocupada por un fluido en movimiento y que en algun instante de tiempo una particula tiene una velocidad V, si consideramos todos los puntos (particulas) y la velocidad en caca punto, tendremos un campo de velocidades

En vez de ser un campo de fuerza, podemos suponer que $\mathbb{F}$ representa el campo de velocidades de un fluido que corre a lo largo de una curva.

El flujo a lo largo de una curva C de $\mathbb{R}^n$ regular a trozos y parametrizada por medio de α, realizado por el campo de velocidades $\mathbb{F}$ de un fluido esta determinado por

Flujo= $\int_C \mathbb{F}(\boldsymbol{x}) \bullet \mathbb{T} dS = \int_a^b \mathbb{F}(\alpha(t)) \bullet \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} dt = \int_a^b \mathbb{F}(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t) dt$

Nota: Si la curva es cerrada el flujo se denomina circulación.

---

[3]



Michael Faraday, FRS, (Newington, 22 de septiembre de 1791 - Londres, 25 de agosto de 1867) fue un físico y químico británico que estudió el electromagnetismo y la electroquímica. En 1831 trazó el campo magnético alrededor de un conductor por el que circula una corriente eléctrica, ya descubierto por Oersted, y ese mismo año descubrió la inducción electromagnética, demostró la inducción de una corriente eléctrica por otra, e introdujo el concepto de líneas de fuerza, para representar los campos magnéticos. Durante este mismo periodo, investigó sobre la electrólisis y descubrió las dos leyes fundamentales que llevan su nombre:

Ejemplo 5.4.2 *El campo de velocidades de un fluido es* $\mathbb{F}(x,y,z) = (x,\ y,\ z)$. *Encuentre el flujo a lo largo de la hélice circular* $\alpha(t) = (Cost,\ Sent,\ t)$ *con* $0 \leq t \leq 2\pi$

$\alpha\prime(t) = [-Sent,\ Cost, 1]$

$\mathbb{F}(\alpha(t)) = (Cost,\ Sent,\ t)$

$Flujo = \int_0^{2\pi} (Cost,\ Sent,\ t) \bullet [-Sent,\ Cost, 1]dt$

$= \int_0^{2\pi} tdt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2$

Si C es una curva cerrada suave en el dominio de un campo vectorial continuo $F(x,y) = M(x,y)i + N(x,y)j$ en el plano y n es un vector normal a C, el flujo de F a traves de C es igual a Flujo=$\int_C F \cdot ndS$ y la circulación de F a traves de C es igual a $\int_C F \cdot TdS$

Ejercicios secciòn 5.4.

1. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas dado, para mover una particula a lo largo de la curva C dada.

   a) $\mathbb{F}(x,y) = [-x,-y]$ $C:$ y=x^2 desde $(0,0)$ hasta $(2,4)$

   b) $\mathbb{F}(x,y) = [x^2, y2]$ $C: x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ desde $(1,0)$ hasta $(0,1)$

   c) $\mathbb{F}(x,y) = \left[-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right]$ C es el circulo $x^2+y^2 = a^2$ en sentido contrario a las manecillas del reloj.

2. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas dado, para mover una particula a lo largo de la curva C dada.

   a) $\mathbb{F}(x,y,z) = [xy^3 + yz, x^2y^2 + xz, xy]$ C es la curva parametrizada por medio de $\alpha(t) = [t^a, t^b, t^c]$ a, b y c naturales con $0 \leq t \leq 1$

   b) $\mathbb{F}(x,y,z) = [x^2, y^2, z^2]$ C es la curva intersección entre la esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = ay$

   c) $\mathbb{F}(x,y) = [yz, xz, xy]$ C es el triàngulo de vértices $(0,0,0)$, $(1,1,1)$ y $(-1,1,-1)$ en ese orden

3. Si $\mathbb{F}$ es un campo de velocidades de un fluido, halle el flujo a lo largo de la curva dada.

   a) $\mathbb{F}(x,y) = (x-y, y-x)$ C es el circulo unitario.

   b) $\mathbb{F}(x,y) = (3xy, 1)$ C es la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$

   c) $\mathbb{F}(x,y) = (Cost,\ Sent)$ C es el segmento de recta que une $(1,1)$ con $(2,4)$

4. Halle la circulación de los campos de velocidades del numeral 4.

5. Si $\mathbb{F}$ es un campo de velocidades de un fluido, halle el flujo a lo largo de la curva dada.

   a) $\mathbb{F}(x, y, z) = (2x, 3y, 4z)$ C es la curva parametrizada por medio de $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ con $0 \leq t \leq 1$

   b) $\mathbb{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ C es la curva intersección entre la esfera unitaria y el plano $x + y + z = 1$

   c) $\mathbb{F}(x, y, z)$

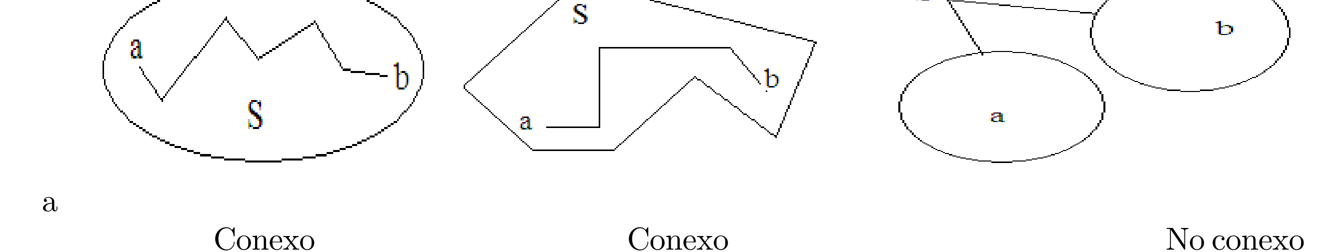
6. Suponga que una curva regular C está determinada por $\alpha(t) = [t, f(t)]$ para $a \leq t \leq b$. Existe alguna relación entre el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbb{F}(x, y) = y\mathbf{i}$ para mover una particula a lo largo de C y el área debajo de la curva C.

7. Utilizando un CAS grafique un campo de fuerzas y una curva C, luego determine si el trabajo es positivo, negativo o cero.

5.5. Teorema fundamental del cálculo para integrales de lìnea.

En esta sección consideraremos campos vectoriales conservativos cuya integral depende de los extremos de la trayectoria y no del camino que los une. Ademas comprobaremos que un campo vectorial es conservativo si es el gradiente de un campo escalar.

Se dice que una curva C de $\mathbb{R}^n$ es rectificable si es suave a trozos y de longitud finita.
Se dice que un conjunto S de $\mathbb{R}^n$ abierto es un conjunto conexo si todo par de puntos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ de S, se pueden unir por un camino regular a trozos contenido en S



a

Conexo Conexo No conexo

Si C es una curva rectificable de extremos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ contenida en un conjunto conexo S y $\mathbb{F}$ un campo vectorial continuo en S, se dice que $\int_C \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\alpha$ es independiente de C si la integral solo depende de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, y no de C.
Si un campo vectorial $\mathbb{F}$ es el gradiente de un campo escalar ϕ, entonces ϕ es llamado potencial y $\mathbb{F}$ es llamado campo conservativo.

Teorema 5.5.1 *Si ϕ es un campo escalar de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ diferenciable en un conjunto conexo abierto S de $\mathbb{R}^n$, entonces para dos puntos cualesquiera* **a** *y* **b** *unidos por una curva regular a trozos C contenida en S, se tiene que* $\int_C \nabla\phi d\alpha = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})$

Demostración. Sean **a** y **b** dos puntos de S que unen un camino regular a trozos $C \subset S$
parametrizado por medio de α de $[t_0, t_n]$ en $\mathbb{R}^n$
aplicando la regla de la cadena para campos escalares
si $g(t) = \phi(\alpha(t))$
$g(t_n) = \phi(\alpha(t_n)) = \phi(\mathbf{b})$
y $g(t_0) = \phi(\alpha(t_0)) = \phi(\mathbf{a})$
entonces $g'(t) = \nabla\phi(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t)$
luego
$\int_C \nabla\phi d\alpha = \int_{t_0}^{t_n} \nabla\phi(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t) dt$
$= \int_{t_0}^{t_n} g'(t)dt = g(t)|_{t_0}^{t_n}$
$= g(t_n) - g(t_0) = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})$ ■

Como consecuencia del teorema la integral de línea de un gradiente es independiene de la trayectoria.

El siguiente teorema determina las condiciones necesarias y suficientes para que un campo vectorial sea un gradiente.

Teorema 5.5.2 *Si $\mathbb{F}$ es un campo vectorial continuo en un conjunto conexo abierto S de $\mathbb{R}^n$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*
(i) $\mathbb{F}$ es el gradiente de una función potencial en S
(ii) La integral de linea de $\mathbb{F}$ es independiente de la trayectoria en S
(iii) La integral de $\mathbb{F}$ a lo largo de una curva cerrada regular a trozos C contenida en S es nula

Demostración. Basta demostrar que
$(i) \Rightarrow (ii)$, $(ii) \Rightarrow (iii)$, $(iii) \Rightarrow (ii)$ y $(ii) \Rightarrow (i)$
ya que $(i) \Rightarrow (ii) \ \wedge (ii) \Rightarrow (iii)$ es equivalente a $(i) \Rightarrow (iii)$
y que $(iii) \Rightarrow (ii) \wedge (ii) \Rightarrow (i)$ es equivalente a $(iii) \Rightarrow (i)$
veamos que $(i) \Rightarrow (ii)$
supongamos que $\mathbb{F}$=$\nabla\phi$ entonces por el teorema 1.
$\int_C \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\alpha = \int_C \nabla\phi d\alpha = \phi(b) - \phi(a)$
lo cual nos dice que no importa cual sea el camino que une a con b
por lo tanto es independiente de la trayectoria que une a con b
veamos ahora que $(ii) \Rightarrow (iii)$
$\int_C \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\alpha = \int_{C_1} \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\alpha + \int_{C_2} \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\alpha = \int_{C_1} \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\alpha - \int_{-C_2} \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\alpha = 0$
por lo tanto la integral de linea a lo largo de una curva cerrada regular a trozos C contenida en S es nula
veamos que $(iii) \Rightarrow (ii)$
$\int_C \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\alpha = \int_{C_1 \cup C_2} \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\alpha = \int_{C_1} \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\alpha + \int_{C_2} \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\alpha$

$= \int_{C_1} \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\alpha - \int_{-C_2} \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\alpha$
entonces $\int_{C_1} \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\alpha = \int_{-C_2} \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\alpha$
por lo tanto $\int_{C} \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\alpha$ depende solo de los extremos de C
$(ii) \Rightarrow (i)$
Se deja como ejercicio al lector. ■

El contarreciproco del siguiente teorema de condiciones necesarias nos puede servir para determinar cuando un campo vectorial no es un gradiente.

Teorema 5.5.3 *Si $\mathbb{F}$ es un campo vectorial diferenciable en un conjunto conexo abierto S de $\mathbb{R}^n$ y ademas si $\mathbb{F}$ es el gradiente de un campo escalar ϕ en S, entonces las derivadas parciales de las componentes de $\mathbb{F}$ satisfacen las ecuaciones $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$ para $i, j = 1, 2, ..., n$ y $\forall\, \boldsymbol{x} \in S$*

Demostración. Sea $\mathbb{F}(\boldsymbol{x}) = [F_1(\boldsymbol{x}), F_2(\boldsymbol{x}), ..., F_n(\boldsymbol{x})]$
donde $F_i(\boldsymbol{x})\ \forall i = 1, 2, ..., n$ son campos escalares de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$
ademas $\mathbb{F}(\mathbf{x}) = \nabla\phi(\mathbf{x})$
es decir $\dfrac{\partial \phi}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = F_i(\boldsymbol{x}) \quad \forall \boldsymbol{x} \in S$ y $\forall i = 1, 2, ..., n$
Derivando respecto a x_j (con $x_j \neq x_i$)
$\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})$ y visceversa
$\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$
y como ϕ es diferenciable $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x})$
entonces $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$ ■

Ejemplo 5.5.1 *Determinar si el campo vectorial $\mathbb{F}(x, y) = [2xe^y + y, x^2e^y - x]$ es o no un gradiente.*
Veamos que $F_1(x, y) = 2xe^y + y$
y $F_2(x, y) = x^2e^y - x$

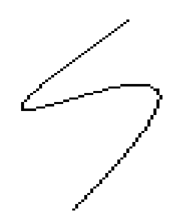
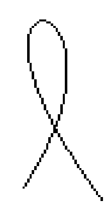
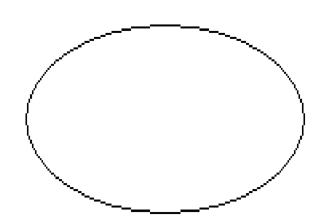
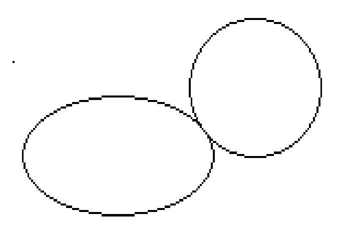
$\dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = 2xe^y + 1$
$\dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) = 2xe^y - 1$
como $\dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) \neq \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x, y)$
$\mathbb{F}$ *no es un gradiente*

Ejemplo 5.5.2 *Determinar si el campo vectorial* $\mathbb{F}(x,y) = \left[\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right]$ *es o no un gradiente.*

Aunque $\dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$
no podemos afirmar que $\mathbb{F}$ *sea un gradiente*
calculamos la integral de $\mathbb{F}$ *a lo largo de una curva cerrada*
$C\colon x^2+y^2=1$
$\alpha(t) = [\cos t, sent]$ *y* $\alpha'(t) = [-sent, \cos t]$ *con* $0 \le t \le 2\pi$
$\int_0^{2\pi}(-sent, \cos t)(-sent, \cos t)dt$
$= \int_0^{2\pi}(sen^2 t + \cos^2 t)dt$
$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$
es diferente de cero.
entonces $\mathbb{F}$ *no es un gradiente.*

El reciproco del teorema anterior es válido sólo si la región S es simplemente conexa. Una región S es simplemente conexa si S es conexa y toda curva simple cerrada en S es la frontera de una región de puntos de S.

Diferentes tipos de curvas.

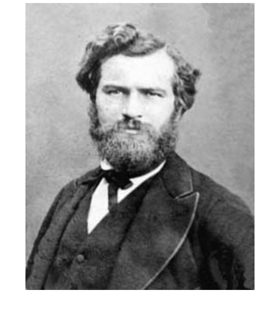





simple abierta   no simple abierta   simple cerrada   no simple cerrada

Las curvas cerradas simples planas tambien se denominan curvas de Jordan[4].



4



Camille Jordan (Lyon 1838 - París 1922) Fue un matemático francés conocido tanto por su trabajo, fundamental, sobre la teoría de los grupos como por su influyente Curso de análisis (Cours d'analyse). Jordan estudió en la Escuela Politécnica (promoción 1855). Fue ingeniero de minas y, más tarde ejerció como examinador en la misma escuela. En 1876 entró como profesor en el Colegio de Francia, sustituyendo a Joseph Liouville. Su nombre se asocia a un determinado número de resultados fundamentales: El teorema de la curva de Jordan: un resultado topológico recogido en análisis complejo. La forma normal de Jordan en álgebra lineal. El teorema de Jordan-Holder, que es el resultado básico de unas series de composiciones. El trabajo de Jordan incidió de manera sustancial en la introducción de la teoría de Galois en la corriente del pensamiento mayoritario. Investigó también los grupos de Mathieu, los primeros ejemplos de grupos esporádicos. Su Tratado de las sustituciones (Traité des substitutions) sobre las permutaciones de grupos fue publicado en 1870. El 4 de abril de 1881 fue elegido miembro de la Academia de la Ciencia. De 1885 a 1921 dirige la «Revista de matemáticas puras y aplicadas» (Journal de mathèmatiques pures et apliqués), fundado por Liouville.

Teorema 5.5.4 *Si $\mathbb{F}$ es un campo vectorial diferenciable en un conjunto conexo abierto S de $\mathbb{R}^n$ y ademas F_i para $i = 1, 2, ..., n$ tiene derivadas parciales continuas y* $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\ \forall\, \boldsymbol{x} \in S$ *entonces $\mathbb{F}$ es un gradiente.*

Corolario 5.5.1 *Si ϕ es un campo escalar diferenciable en un conjunto conexo abierto S de $\mathbb{R}^n$, tal que $\nabla\phi = \mathbf{0}$ entonces $\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}} \nabla\phi d\alpha = 0$*

Demostración. Sea $\mathbf{a} \in S$
y α una parametrización de una curva contenida en S
que une $\mathbf{a}$ con $\mathbf{x}$
utilizando el teorema 1
$\phi(x) - \nabla\phi(a) = \int_a^x \nabla\phi(x) d\alpha$
pero como $\nabla\phi(x) = \mathbf{0}$
entonces $\int_a^x \nabla\phi(x) d\alpha = 0$
$\phi(x) - \nabla\phi(a) = 0$
luego $\phi(x) = \nabla\phi(a)$ ■

Propiedad 5.5.1 *Método para construir un potencial.*
Si el campo vectorial $\mathbb{F}$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ es el gradiente de un campo escalar ϕ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, entonces $\phi(\boldsymbol{x}) = \int F_i(\boldsymbol{x}) dx_i + A_i(\boldsymbol{y})\quad \forall i = 1, 2, ..., n$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n-1}$, siendo $A_i(\boldsymbol{y})$ el resto que depende de las otras variables diferentes de x_i

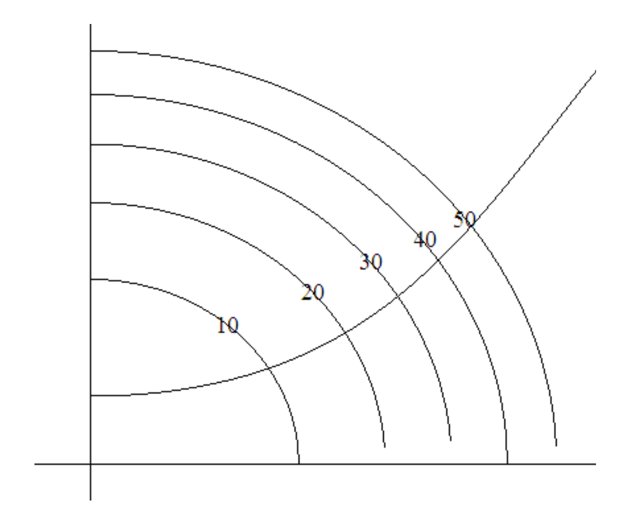
Ejemplo 5.5.3 *Calcular $\int_C [2xy^3 + yz, 3x^2y^2 + xz, xy]\, d\alpha$, si C es la curva intersección entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$.*
La curva intersección entre las esferas es una curva cerrada
veamos ahora si $\mathbb{F} = (F_1, F_2, F_3)$ es un gradiente
$F_1(x, y, z) = 2xy^3 + yz,\ F_2(x, y, z) = 3x^2y^2 + xz,\ F_3(x, y, z) = xy$
entonces
$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z) = 6xy^2 + z$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial F_3}{\partial x}(x, y, z) = y$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial F_3}{\partial y}(x, y, z) = x$$
vemos que $\mathbb{F}$ es un gradiente y es continuo en cualquier región de $\mathbb{R}^3$
como la curva C es cerrada
$\int_C (2xy^3 + yz, 3x^2y^2 + xz, xy) d\alpha = 0$

Ejemplo 5.5.4 *Calcular la integral de linea $\int_{(1,0)}^{(e,1)} [Lnx + 2y, e^y + 2x] d\alpha$*
Veamos si $\mathbb{F}(x, y) = [Lnx + 2y, e^y + 2x]$ es un gradiente
$F_1(x, y) = Lnx + 2y$ y $F_2(x, y) = e^y + 2x$

$\dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 2$ *y* $\dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = 2$
consideremos un conjunto conexo en el que $x > 0$
entonces $\mathbb{F}$ *es un gradiente*
construimos el potencial
$\phi(x,y) = \int_C (Lnx + 2y)dx + A(y) = xLnx - x + 2xy + A(y)$
$\phi(x,y) = \int_C (e^y + 2x)dy + A(x) = e^y + 2xy + A(x)$
Luego $\phi(x,y) = xLnx - x + 2xy + e^y + k$ *entonces*
$\int_C (Lnx + 2y)dx + (e^y + 2x)dy = \phi(e,1) - \phi(1,0) = 3e$

Ejercicios sección 5.5.

1. En la figura se ve una curva C y un conjunto de curvas de nivel de un campo escalar ϕ cuyo gradiente es continuo. Calcule $\int_C \nabla\phi(x,y)d\alpha$



2. La siguiente tabla determina unos valores de un campo escalar ϕ con gradiente continuo. Determine $\int_C \nabla\phi(x,y)d\alpha$ donde C está determinada por $\alpha(t) = [t^2+1, 2t]$ con $0 \leq t \leq 2$

$x\backslash y$	0	2	4
0	1	5	3
4	4	7	5
6	8	5	9

3. Determine si el campo vectorial $\mathbb{F}$ es conservativo o no, si lo es halle su correspondiente función potencial.

    a) $\mathbb{F}(x,y) = [1 + 4x^3y^3, 3x^4y^2]$
    b) $\mathbb{F}(x,y) = [yCosx + Seny + 1, Senx + xCosy + 1]$

c) $\mathbb{F}(x,y) = [e^x Seny + 1, e^x Cosy + 1]$

4. Determine si el campo vectorial $\mathbb{F}$ es conservativo o no, si lo es halle su correspondiente función potencial.

   a) $\mathbb{F}(x,y,z) = [x^2y, xz^2, zy^2]$
   b) $\mathbb{F}(x,y,z) = [e^{y+2z}, xe^{y+2z}, 2xe^{y+2z}]$
   c) $\mathbb{F}(x,y,z) = [y^2\cos z, 2xy\cos z, -xy^2 senz]$

5. Demuestre que la integral de línea es independiente de la trayectoria y evalue la integral.

   a) $\int_{(-1,1)}^{(3,2)} [x+y, x+y]\, d\alpha$
   b) $\int_{(0,0)}^{(2\pi,0)} [\ln x + 2y, e^x + 2x]\, d\alpha$
   c) $\int_{(2,1/3,\pi)}^{(4,1,2\pi)} \left[e^x \ln y, \dfrac{e^x}{y} + senz, y\cos z\right] d\alpha$

6. Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbb{F}$ para mover una particula desde P hasta Q.

   a) $\mathbb{F}(x,y) = \left[\dfrac{2x}{y}, -\dfrac{x^2}{y^2}\right]$, $P(-1,1)$ y $Q\,(3,2)$
   b) $\mathbb{F}(x,y) = [e^{-y}, -xe^{-y}]$, $P(0,0)$ y $Q(1,2)$
   c) $\mathbb{F}(x,y,z) = [z^3 + 2xy, x^2, 3xz^2]$, $P(1,1,1)$ y $Q(1,2,4)$

7. Si ϕ y ψ son potenciales de un campo vectorial $\mathbb{F}$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, demuestre que $\phi - \psi$ es constante en un conjunto S de $\mathbb{R}^n$.

8. Si ϕ y ψ son potenciales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, es $\phi \pm \psi$ potencial de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$? Justifique su respuesta.

9. Si $\mathbb{F}$ y $\mathbb{G}$ son campos conservativos de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, es $\mathbb{F} \pm \mathbb{G}$ campo conservativo de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$? Justifique su respuesta.

10. Utilizando un CAS determine el valor de $\int_C \nabla\phi(x,y)d\alpha$ a partir de algunas curvas de nivel.de ϕ y de una curva C.

5.6. Teorema de Green

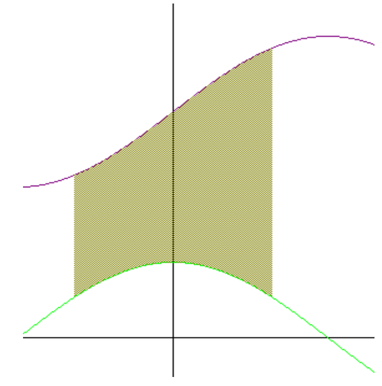
El teorema de Green[5] es uno de los teoremas básicos del analisis vectorial que relaciona una integral de línea a lo largo de una curva plana cerrada con una integral doble en una región encerrada por la curva plana, y visceversa. El teorema de Green permite facilitar el cálculo de algunas integrales de línea (o de integrales dobles) transformándolas en integrales dobles (o en integrales de línea).

Teorema 5.6.1 *Si C es una curva regular a trozos cerrada y simple, que encierra una región Ω de $\mathbb{R}^2$ y si $\mathbb{F}(x,y)$ es un campo vectorial de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ diferenciable en una bola abierta B de $\mathbb{R}^2$ que contiene a Ω, entonces* $\oint_C \mathbb{F}(x,y)d\alpha = \int_\Omega \int \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA$

Demostración. Como $\mathbb{F}(x,y) = [F_1(x,y), F_2(x,y)]$ Basta demostrar que

$\oint_C F_1(x,y)dx = -\int_R \int \frac{\partial F_1}{\partial y} dA$ y $\oint_C F_2(x,y)dy = \int_R \int \frac{\partial F_2}{\partial x} dA$

Si Ω esta determinada por una región tipo 1 (capitulo 4)



$\Omega = \{(x,y) | a \leq x \leq b, \wedge, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ donde g_1 y g_2 son funciones continuas en $[a,b]$

entonces $\int_\Omega \int \frac{\partial F_1}{\partial y} dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y} dydx$

$= \int_a^b F_1(x,y)|_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx$

$= \int_a^b \left(F_1(x, g_2(x)) - F_1(x, g_1(x))\right) dx$

$= -\int_b^a F_1(x, g_2(x))dx - \int_a^b F_1(x, g_1(x))dx$

$= -\int_{C_2} F_1(x,y)dx - \int_{C_1} F_1(x,y)dx = -\oint_C F_1(x,y)dx$

[5]

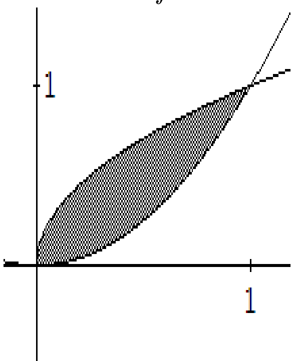


George Green (julio de 1793, 31 de mayo de 1841) fue un matemático británico cuyo trabajo influenció notablemente el desarrollo de importantes conceptos en física. Entre sus obras más famosas se cita: Ün análisis de las aplicaciones del análisis matemático a las teorías de la electricidad y el magnetismo"publicado en 1828. En este ensayo se introdujeron los conceptos de funciones de potencial utilizados comúnmente en la formulación matemática de la física. También aparecieron en este ensayo las funciones de Green y aplicaciones importantes del teorema de Green.

De igual forma se demuestra la otra igualdad.
Queda a cargo del lector. ■

Ejemplo 5.6.1 *Verificar el teorema de Green para* $\mathbb{F}(x,y) = [2xy - x^2, x + y^2]$ *sobre la región acotada por las curvas* $y = x^2$, $x = y^2$.

Si C *es la frontera de* Ω, *limitada por las curvas* $C_1 : y = x^2$ *y* $C_2 : x = y^2$



las cuales se cortan en $(0,0)$ *y* $(1,1)$

entonces parametrizando C_1 *con* $\alpha_1(t)$

$\alpha_1(t) = [t, t^2]$ *con* $0 \leq t \leq 1$ *y* $\alpha'_1(t) = [1, 2t]$

luego $\oint_{C_1} \mathbb{F}(x,y)d\alpha = \int_0^1 [2t^3 - t^2, t + t^4][1, 2t]dt$

$= \int_0^1 (2t^3 + t^2 + 2t^5)dt$

$= \dfrac{t^4}{4} + \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^6}{6}|_0^1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{7}{6}$

Parametrizamos ahora C_2 *con* $\alpha_2(t)$

$\alpha_2(t) = [t, \sqrt{t}]$ *con* $1 \leq t \leq 0$ *y* $\alpha'_2(t) = \left[1, \frac{1}{2\sqrt{t}}\right]$

luego $\oint_{C_2} \mathbb{F}(x,y)d\alpha = \int_1^0 [2t^{3/2} - t^2, t + t] \left[1, \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\right] dt$

$= \int_1^0 (2t^{3/2} - t^2 + t^{1/2})dt$

$= \dfrac{4t^{5/2}}{5} - \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{2t^{3/2}}{3}|_1^0 = -\dfrac{4}{5} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3} = -\dfrac{4}{5} - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{17}{15}$

Por lo tanto

$\oint_C \mathbb{F}(x,y)d\alpha = \dfrac{7}{6} - \dfrac{17}{15} = \dfrac{1}{30}$

Calculamos ahora la integral doble sobre Ω

$\int_\Omega \int \left(\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA$

tal que $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = 1$ *y* $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 2x$

luego $\int_\Omega \int (1 - 2x)\, dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x)dydx$

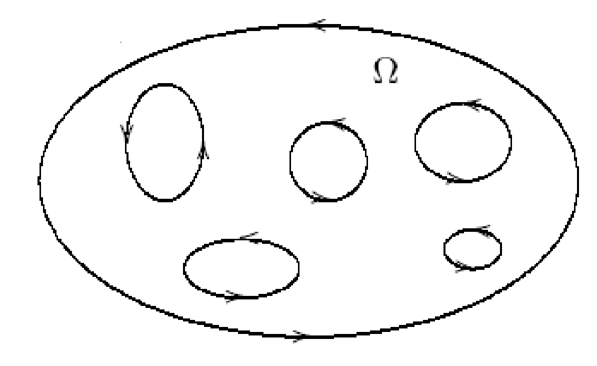
$= \int_0^1 (y - 2xy)|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx$

$= \int_0^1 (\sqrt{x} - 2x^{3/2} - x^2 + 2x^3)dx$

$$= \frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{4x^{5/2}}{5} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2}|_0^1$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{4}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{2} = \frac{1}{30}$$

El Teorema de Green se puede extender a regiones con huecos, cuya frontera esté formada por más de una curva cerrada simple.

Teorema 5.6.2 *Sean C, C_1, C_2,...,C_k, son curvas regular a trozos disyuntas dos a dos y orientadas positivamente (sentido antihorario) que determinan una región Ω de frontera C, con huecos C_k de $\mathbb{R}^2$. Si $\mathbb{F}(x,y)$ es un campo vectorial de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ diferenciable en Ω, entonces* $\oint_C \mathbb{F}(x,y)d\alpha - \sum_{i=1}^{k} \int_{C_i} \mathbb{F}(x,y)d\alpha = \int_\Omega \int \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA$



Notación 6 *Veamos que en el enunciado del teorema hemos supuesto que todas las curvas tienen orientación antihoraria y por eso, en la igualdad las integrales sobre las curvas interiores se restan en lugar de sumarse.*

Una aplicación del teorema de Green es el calculo de áreas, como vimos en el capitulo 4 el área de la región Ω está determinada por $A = \int_\Omega \int dA$, utilizando el teorema de Green podemos transformar esta integral doble en una integral de línea sobre la frontera C de Ω sin más que elegir funciones F_1, F_2 tales que: $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$.

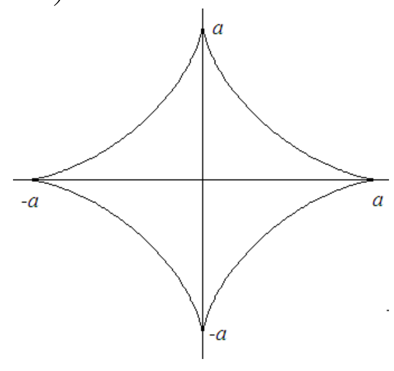
Hay muchas opciones, como: $F_1(x,y) = 0$, $F_2(x,y) = x$; $F_1(x,y) = -y$, $F_2(x,y) = 0$; $F_1(x,y) = -\frac{y}{2}$, $F_2(x,y) = \frac{x}{2}$; etc.

Por lo que obtenemos las siguientes expresiones para el área: $A = \int_C xdy = -\int_C ydx = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx$

Corolario 5.6.1 *Si la frontera de una región Ω en el plano XY es una curva C regular a trozos y cerrada simple, entonces el área de R es igual a* $A = \oint_C xdy = -\oint_C ydx = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$

Demostración. Si $F_1(x,y)=0$ entonces $F_2(x,y)=x$
Si $F_2(x,y)=0$ entonces $F_1(x,y)=-y$
Luego si $F_1(x,y)=-\dfrac{y}{2}$ y $F_2(x,y)=\dfrac{x}{2}$ entonces
$A=\oint_C xdy=-\oint_C ydx=\dfrac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$
Aplicando el teorema de Green
$A=\dfrac{1}{2}\oint_C xdy-ydx=\dfrac{1}{2}\int_\Omega\int(1+1)dydx=\int_\Omega\int dydx$ ∎

Ejemplo 5.6.2 *Calcular el área de la región encerrada por la hipocicloide* $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ *($a>0$).*



Utilizando la parametrización
$x=a\cos^3 t,\ y=asen^3t,\ con\ 0\le t\le 2\pi$
$dx=-3a\cos^2 tsent,\ dy=3asen^2t\cos t$
$A=\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[(a\cos^3 t)(3asen^2t\cos t)-(asen^3t)(-3a\cos^2 tsent)\right]dt$
$=\dfrac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi} sen^2t\cos^2 tdt$
$=\dfrac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi} sen^2(2t)dt$
$=\dfrac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\left(\dfrac{1-\cos(4t)}{2}\right)dt$
$=\dfrac{3}{16}a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos s(4t))dt$
$=\dfrac{3}{8}\pi a^2$

Ejercicios sección 5.6.

1. Comprobar el teorema de Green del campo vectorial $\mathbb{F}$ dado, sobre la región Ω

   a) $\mathbb{F}(x,y)=[3x^2y,-x^3]$ si Ω es la región acotada por las curvas $y=x^2$ y $y=1$
   b) $\mathbb{F}(x,y)=[xy,xy]$ si Ω es la región acotada por $y=\sqrt{4-x^2}$ y $y=0$
   c) $\mathbb{F}(x,y)=[x+2y,x-2y]$ si Ω es la región acotada por las curvas $y=x^2$ y $y=x$.

2. Comprobar el teorema de Green del campo vectorial $\mathbb{F}$ dado, sobre la región Ω

a) $\mathbb{F}(x,y) = [xy, x^2]$ si Ω es la región acotada por el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,1)$

b) $\mathbb{F}(x,y) = [x, -x^2y^2]$ si Ω es la región acotada por el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$.

c) $\mathbb{F}(x,y) = [xy^2, -x^2y]$ si Ω es la región poligonal de vértices $(0,0)$, $(4,0)$, $(3,1)$ y $(1,1)$.

3. Utilice el teorema de Green para evaluar la integral dada.

   a) $\oint_C (y + e^x, 2x + Cosy^2)d\alpha$ si C es la curva determinada por $y = x^2$ y $x = y^2$

   b) $\oint_C (y^2 - ArcTanx, 3x + Seny)d\alpha$ si C es la curva determinada por $y = x^2$ y $y = 4$

   c) $\oint_C (x^4 - 3y, 2y^3 + 4x)d\alpha$ si C es la curva determinada por $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

4. Utilice el teorema de Green para evaluar la integral dada.

   a) $\oint_C (x - y, x + y)d\alpha$ si C es la frontera entre los cuadrados de vértices $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ y $(1,1)$; $(-2,-2)$, $(-2,2)$, $(2,-2)$ y $(2,2)$.

   b) $\oint_C (x^3 - y^3, x^3 + y^3)d\alpha$ si C es la frontera de la región comprendida por $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

   c) $\oint_C (e^{\sin x} - y, e^{\cos y} + x)d\alpha$ si C es la frontera de la región comprendida entre de las gráficas de $x^2 + y^2 = 9$, $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

5. Use una integral de línea para hallar el área de la región Ω

   a) Ω acotada por las graficas de las parabolas $y = x^2$ y $x = y^2$

   b) Ω acotada por la gráficas de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

   c) Ω acotada por la gráficas de la $r = 2(1 - \cos\theta)$

6. Calcular el trabajo realizado por la fuerza $\mathbb{F}$ para mover una particula a lo largo de la curva C.

   a) $\mathbb{F}(x,y) = [3x + y, 4x - 5y]$, C es la elipse $x^2 + 4y^2 = 16$

   b) $\mathbb{F}(x,y) = [e^x + y^2, x^2y + Cosy]$, C es la curva acotada por $y = \sqrt{25 - x^2}$ y $-5 \leq x \leq 5$

   c) $\mathbb{F}(x,y) = [x^4 + 4, x + xy]$, C es el cardiode $r = 1 + \cos\theta$.

7. Utilice el teorema de Green para demostrar el teorema del cambio de variables para una integral doble para el caso $F(x,y) = 1$.

8. Utilizando un CAS verifique el teorema de Green.

Ejercicios de repaso del capitulo 5
PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

1. Para calcular una integral de línea a lo largo de una curva, esta se debe parametrizar
2. La parametrización de una curva es unica.
3. La integral de línea a lo largo de cualquier curva cerrada es igual a cero.
4. Los limites de integración de una integral de línea dependen de la parametrización.
5. Asociado a todo campo vectorial conservativo existe su correspondiente función potencial.
6. El trabajo realizado por una fuerza para mover una particula a lo largo de una curva es una integral de línea.
7. El teorema fundamental del cálculo para integrales de línea esta definido solamente para campos vectoriales.
8. Un poligono regular de n lados es un conjunto conexo.
9. Una curva en forma de ocho es simple.
10. El teorema de Green esta definido solamente $\mathbb{R}^2$

PREGUNTAS DE SELECCIÓN MULTIPLE CON UNICA RESPUESTA

1. La integral de línea $\int_C F(x,y)dS$, si C es el circulo unitario, es equivalente a:

A. $\int_{-1}^{1} F\left(t, \sqrt{1-t^2}\right) dt$ B. $\int_0^{2\pi} F(\cos(2t), sen(2t))dt$ C. $2\int_0^{\pi} F(\cos t, sent)dt$ D. $\int_0^{\pi/4} F(\cos(4t), sen(4t))dt$

2. La masa de un alambre homogeneo con forma de un triangulo equilatero de lado 1 es igual a:

A. $3K$ B. $\frac{3}{2}K$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}K$ D. K

3. La integral de línea $\int_C \mathbb{F}(\boldsymbol{x})d\alpha$, si C es el segmento de recta de $(0,0)$ hasta $(1,1)$, es igual a:

A. $\int_0^1 \mathbb{F}(t,t)dt$ B. $\int_0^1 \mathbb{F}(t,t)(t,t)dt$ C: $\int_0^1 \mathbb{F}(t^2,t^2)(2t,2t)dt$ D. $\int_0^1 \mathbb{F}(\cos t, sent)(-se$

4. Un campo de fuerzas viene dado en coordenadas polares por la ecuación $F(r,\theta) = -4sen\theta \overrightarrow{i} + 4sen\theta \overrightarrow{j}$. El trabajo efectuado al mover una partícula desde el punto $(1,0)$ al origen siguiendo la espiral $r = e^{-\theta}$ es:

A. $\frac{5}{8}$ B. $-\frac{5}{8}$ C. $\frac{8}{5}$ D. $-\frac{8}{5}$

5. Para el campo vectorial $\mathbb{F}(x,y) = \left[\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right]$, se puede afirmar que:

A: Su potencial es $\phi = -\arctan\frac{x}{y}$ B. $\mathbb{F}$ no es un gradiente

C. $\int_C \mathbb{F}(x,y)d\alpha$ es independiente de la trayectoria D. Su potencial es $\phi = \arctan\frac{y}{x}$

6. La integral de línea $\int_C (4x+2y-z)\,dx + (2x-2y+z)\,dy + (-x+y+2z)\,dz$ es independiente de la trayectoria y su valor desde $(0,0,0)$ hasta $(2,1,3)$ es:

A. 13 B. 15 C. -15 D. 17

7. Si C es el borde de la cardiode $r = 1+\cos\theta$, $I = \int_C (x^4+4)dx + xydy$ entonces:

A. $I = \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} r^2 sen\theta drd\theta$ B..$I = \int_0^{2\pi}(sen^2t + \cos^3)tdt$
C.$I = \int_0^{2\pi}[-\cos t sent - sen^2t, sent\cos t + \cos^3 t]\,dt$ D. $I = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 sen\theta drd\theta$

8. El área de la región encerrada por la deltoide $x = 2\cos t + \cos 2t$ y $y = 2sent - sen2t$, $0 \le t \le 2\pi$ es:

A. 2π B.3π C.$\frac{3}{2}\pi$ D.$\frac{5}{2}\pi$

9. Si $\mathbb{F}(x,y) = -x^2y\overrightarrow{i} + xy^2\overrightarrow{j}$ y C esta formada por la porción de circulo $x^2+y^2 = 4$ desde $(2,0)$ hasta $(\sqrt{2},\sqrt{2})$y los segmentos de recta desde $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ hasta $(0,0)$ y de $(0,0)$ hasta $(2,0)$ entonces $\int_C Fd\alpha$es igual a:

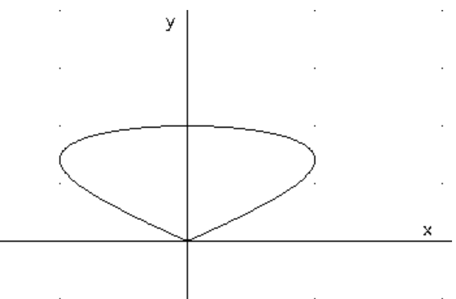
A..π B.$\pi+2$ C.$\frac{3\pi}{2}$ D.$\frac{5\pi}{2}$

10. La integral de lìnea $\int_C x^2dy + y^2dx$, donde C es el circulo $x^2+y^2 = 1$, es equivalente a:

A. $2\int_0^1\int_0^{2\pi}(rsen\theta - r\cos\theta)d\theta dr$ B. $2\int_0^1\int_0^{2\pi}(r^2\cos\theta - r^2sen\theta)d\theta dr$
C. $\int_0^1\int_0^{\pi}(r\cos\theta - rsen\theta)d\theta dr$ D. $2\int_0^1\int_0^{\pi}(r^2sen\theta - r^2\cos\theta)d\theta dr$

PREGUNTAS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE CON MÚLTIPLE RESPUESTA
Si 1 y 2 son correctas marque A Si 2 y 3 son correctas marque B
Si 3 y 4 son correctas marque C Si 2 y 4 son correctas marque D
Si 1 y 3 son correctas marque E

1. Si la ecuación parametrica del lazo de curva C es $\alpha(t) = [sen(2t), sent]$, es correcto afirmar que:



1. Area que encierra C es igual a $\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(sen(2t)\cos t - 2sent\cos(2t))dt$
2. longitud de C es igual a $\int_0^{\pi}(2\cos(2t), \cos t)dt$
3. $t \in [0, 2\pi]$
4. Area que encierra C es igual a $\frac{8}{3}$

A. B. C. D. E.

2. Para el campo vectorial $\mathbb{F}(x, y) = \left[y + \frac{1}{x}, x + \frac{1}{y}\right]$se puede afirmar que:

1. $\mathbb{F}$ es conservativo 2.$\varphi(x, y) = Ln(x + y) + xy + c$es su potencial
3.$\int_C \mathbb{F}(x, y)d\alpha = 0$ si $C : x^2 + y^2 = r^2$ 4. $\int_C \mathbb{F}(x, y)d\alpha$ es independiente de la trayectoria.

A. B. C. D. E.

3. Para el campo vectorial $\mathbb{F}(x, y) = \left[\frac{1}{x + y}, \frac{1}{x + y}\right]$se puede afirmar que:

1. El potencial de $\mathbb{F}$ es $\varphi = Lnx + Lny + C$
2. $\mathbb{F}$ es conservativo. 3. $\int_C \mathbb{F}(x, y)d\alpha = 0$ si C es cualquier curva cerrada.
4. El trabajo realizado por $\mathbb{F}$ para mover una partícula a lo largo de una curva C puede ser igual a cero.

A. B. C. D. E.

4. Suponga que $\mathbb{F}$ es el campo de fuerza gravitacional ejercido por una partícula de masa M unidades ubicado en el origen sobre una partícula de masa 1 unidad localizada en el punto $P(x, y, z)$. Entonces $\mathbb{F}$ esta dado por: $\mathbb{F}(x, y, z) = \frac{-GM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$, se puede afirmar que:

1. La función potencial es $\sigma(x, y, z) = \frac{GM}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$
2. El trabajo realizado por la fuerza $\mathbb{F}$ que mueve una partícula de masa 1 unidad a lo largo de una curva suave C desde el punto $(1, 3, 4)$ hasta el punto $(2, 2, 2)$ es $\frac{2}{15}GM$

3. La función potencial es $\sigma(x,y,z) = -\dfrac{GM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

4. El trabajo realizado por la fuerza $\mathbb{F}$ que mueve una partícula de masa 1 unidad a lo largo de una curva suave C desde el punto $(0,3,4)$ hasta el punto $(2,2,1)$ es $\left(\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{26}}{26}\right) GM$

A. B. C. D. E.

5. Para el campo vectorial $\mathbb{F}(x,y) = xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ definido sobre la curva C orientada positivamente y formada por las curvas $y = x^2$y $y = x$en el primer cuadrante se tiene.

1. La circulación es $\dfrac{1}{12}$ 2. El flujo hacia el exterior es $\dfrac{1}{5}$

3. La circulación es $-\dfrac{1}{12}$ 4. El flujo hacia el exterior es $-\dfrac{1}{5}$

A. B. C. D. E.

6. Dada la integral $\int\limits_C (4x+2y-z)dx + (2x-2y+z)dy + (-x+y+2z)dz$se puede concluir lo siguiente:

1. La integral es independiente de la trayectoria
2. Si C es cualquier curva seccionalmente uniforme de $(4,-2,1)$ a $(-1,2,0)$ la integral es igual a -26
3. Si C es cualquier curva seccionalmente uniforme cerrada el valor de la integral es -26
4. Si C es cualquier curva seccionalmente uniforme de $(4,-2,1)$ a $(-1,2,0)$ la integral es igual a -13.

A. B. C. D. E.

7. Sean φ es un campo escalar y $\mathbb{F}$ es un campo vectorial, definidos sobre una curva suave C dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, con $\theta 1 \le \theta \le \theta_2$.

1. Longitud de C es $\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$ 2. $\int_C F(x,y)d\alpha = \int_{\theta_1}^{\theta_2} F(r\cos\theta, rsen\theta)(-rsen\theta, r\cos\theta)d\theta$

3. $\int_C \varphi(x,y)ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \varphi(r\cos\theta, rsen\theta)rd\theta$ 4. $\alpha(\theta) = [r(\theta)\cos\theta, r(\theta)sen\theta]$ es una parametrización de C.

A. B. C. D. E.

8. Las coordenadas del centroide de una lamina plana de área A, acotada por una curva regular, cerrada y simple C son:

1. $\overline{x} = \frac{1}{A}\int_C x^2 dy$ 2. $\overline{y} = \frac{1}{A}\int_C y^2 dy$ 3. $\overline{y} = \frac{1}{2A}\int_C y^2 dy$ 4. $\overline{x} = \frac{1}{2A}\int_C x^2 dy$

A. B. C. D. E.

PREGUNTAS ABIERTAS

1. Calcular la integral de linea

   a) $\int_C (x^2 + y^2)dS$ si C es la curva cuya ecuación parametrica es $\alpha(t) = (A(Cost + tSent), A(Sent - tCost))$ con $0 \leq t \leq 2\pi$

   b) $\int_C zdS$Si C es la curva cuya ecuación parametrica es $\alpha(t) = (tCost, tSent, t)$ con $0 \leq t \leq t_0$

   c) $\int_C \left(x + \dfrac{x^2 y}{1 + xy} \right) dS$ si C es la curva determinada por $y = \sqrt{x}$ desde $(0, 0)$ hasta $(4, 2)$

2. Hallar la masa de un alambre de forma circular $x^2 + y^2 = a^2$, si su densidad en cada punto (x, y) es igual a $|x| + |y|$

3. Hallar la longitud de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

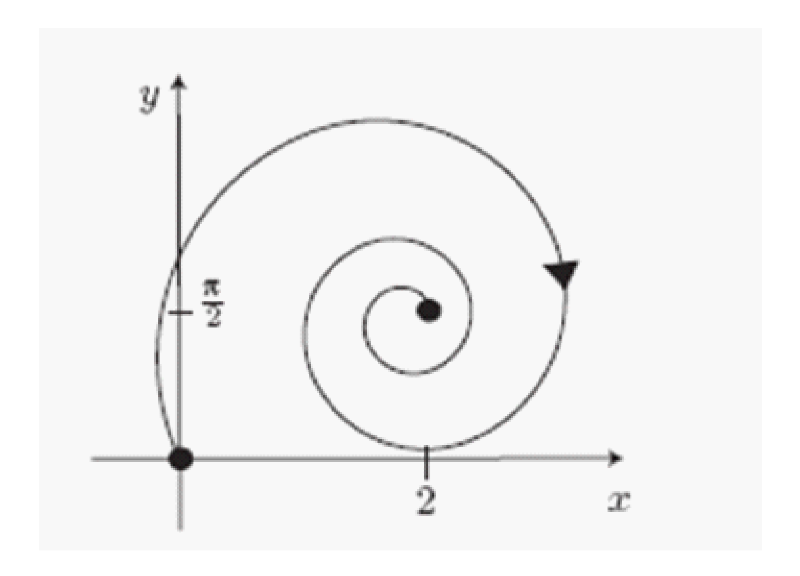
4. Hallar el área de la superficie $z = 2x - y$ sobre la curva $y = |x|$ desde $(-1, 1)$ hasta $(1, 1)$

5. Calcular la integral de linea

   a) $\int_C e^x senydx + e^x \cos ydy$ si C está determinada por el cicloide $\alpha(t) = (t - sent, 1 - \cos t)$ desde $(0, 0)$ hasta $(2\pi, 0)$

   b) $\int_C 2 \arctan \dfrac{y}{x} dx + \ln(x^2 + y^2)dy$ si C está determinada por $\alpha(t) = (4 + 2\cos t, 4 + sent)$

6. Sean C la curva dada en la gráfica, $\mathbb{F}(x, y) = [\sin y, x \cos y]$. Calcular $\int_C \mathbb{F}(x, y)d\alpha$.



7. Encuentre el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbb{F}(x,y) = [\ln x + 2y, e^y + 2x]$ para mover una particula a lo largo de la espiral $r = \theta$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$.

8. Encuentre el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbb{F}(x,y) = [senx + 2y, \cos y + 2x]$ para mover una particula a lo largo de la espiral $r = \theta$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$.

9. Encuentre la circulación antihoraria y el flujo hacia el exterior para el campo $\mathbb{F}(x,y) = [x + y, -x^2 - y^2]$ a través del triángulo acotado por las rectas $y = 0$, $x = 3$, $y = x$.

10. Calcular la integral $\displaystyle\int_c \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ a lo largo de cualquier curva suave desde $(1,1)$ hasta $(2\sqrt{3}, \sqrt{2})$

11. Determinar el valor de α para que la integral de linea sea independiente de la trayectoria y luego calcularla

    a) $\int_{(0,0)}^{(1,-1)} (xy^2 + \alpha x^2 y, x^3 + x^2 y) d\alpha$

    b) $\int_{(1,1)}^{(2,0)} (ye^{2xy} + x, \alpha x e^{2xy}) d\alpha$

12. Determinar si el siguiente campo vectorial es conservativo o no (justifique). $\mathbb{F}(x,y,z) = [Sen^2(5x)Cos^2(5x), y^2 Seny,\ (z+1)^2 e^z]$

13. Sea $\mathbb{F}(x,y) = [x^2 yCosx + 2xySenx\ - y^2 e^x, x^2 Senx - 2ye^x]$

    a) Determinar si $\mathbb{F}$ es conservativo

    b) Si C es una curva suave que une $(-1,2)$ con $(0,3)$ calcule $\int_C \mathbb{F} d\alpha$

14. Si C es cualquier curva suave que une el punto $(0,0,0)$ con el punto $(1,-2,\pi)$. Calcular la integral de linea $\int_C (e^x Senz + 2yz, 2xz + 2y, e^x Cosz + 2xy + 3z^2) d\alpha$

15. Calcular la integral de linea $\int_{(-1,-1/2,\pi)}^{(0,1,\pi/2)} (ye^{xy}Cosz - 2e^{-2x}Sen(\pi y), \pi e^{-2x}Cos(\pi y) + xe^{xy}Cosz, e^{xy}Senz) d\alpha$

16. Calcular la integral de linea $\int_C (5x^3 + 4y, 2x - 4y^4) d\alpha$ a lo largo de la curva C : $(x-2)^2 + y^2 = 4$

17. Calcular la integral de linea $\oint_C [ArcTanx + y^2, Lny - x^2] d\alpha$ si C es la región acotada por las curvas $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ y $y \geq 0$

18. Si C es una curva regular simple que encierra una región R de área k . Demuestre que si a_i , b_i son constantes $\oint_C [a_1 x + a_2 y + a_3, b_1 x + b_2 y + b_3] d\alpha = (b_1 - a_2)k$

19. Demuestre que el área de una región plana acotada por una curva regular, cerrada y simple C, dada en coordendas polares es igual a $A = \dfrac{1}{2} \int_C r^2 d\theta$

20. Verificar el teorema de Green para $\mathbb{F}(x,y) = y^n \overrightarrow{\mathbf{i}} + x^n \overrightarrow{\mathbf{j}}$ sobre la región acotada por las curvas $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ con $a > 0$ y $y = 0$.

21. Use el teorema de Green para calcular la integral de $\mathbb{F}(x,y) = [3y, 1]$ en la región interior al circulo $x^2 + y^2 = 25$ y exterior a 4 circulos de radio 1 y centros en $(2,0)$, $(-2,0)$, $(0,2)$ y $(0,-2)$

22. Use el teorema der Green para calcular la integral de $\mathbb{F}(x,y) = [x + y, 2x - y]$ en la región interior al circulo $x^2 + y^2 = 1$ y exterior a $|x| + |y| = 1$

23. Utilice el teorema de Green para hallar el área de la lemniscata de Bernoulli $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

24. Supongamos que $F(x,y) = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1$. Sea C la curva que empieza en $(2,-1)$ y termina en algún otro punto. Mostrar que $\int_C \nabla F \cdot d\alpha$ es (estrictamente) mayor que cero.

25. Dados dos campos escalares U y V diferenciables en un conjunto abierto que contiene el disco R cuya frontera es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Definimos dos campos vectoriales $\mathbb{F}$ y $\mathbb{G}$ así: $\mathbb{F}(x,y) = V(x,y)\overrightarrow{i} + U(x,y)\overrightarrow{j}$; $\mathbb{G}(x,y) = \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y}\right)\overrightarrow{j}$Encontrar el valor de la integral doble $\int_R \int \mathbb{F} \cdot \mathbb{G} dA$si se sabe que sobre la frontera de R se tiene que $U(x,y) = 1$y $V(x,y) = y$.

PROBLEMAS

1. Un hombre de 90 pies160 lb de peso sube con una lata de 25 lb de pintura por una escalera helicoidal que rodea un silo, con radio de 20 pies. Si el silo mide 90 pies de alto y el hombre hace exactamente tres revoluciones completas. ¿Cuanto trabajo realiza el hombre contra la gravedad al subir hasta la parte superior?

2. El trineo de papa Noel sube una montaña cuya ecuación es $x^2 + y^2 + z = 2\pi$(con $z \geq 0$), realiza un giro completo para llegar a la cima, siendo su pendiente de subida constante. Durante el viaje ejerce una fuerza descrita por el campo vectorial $F(x,y,z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k}$. ¿Cuál es el trabajo realizado por el trineo al viajar desde $\left(\sqrt{2\pi}, 0, 0\right)$hasta la cima?

3. Un astronauta está atrapado en una habitación alienígena sujeto a un campo de lado oscuro de la fuerza, de ecuación $F(x,y) = [ye^{xy} + 2xy^3, xe^{xy} + 3x^2y^2 + \cos y]$ suponiendo que el astronauta esta en el punto $(0,0)$ y la puerta de salida (a la liberación) está en $(5,4)$, halle el camino de mínimo esfuerzo para escapar.

4. La PUJ contrata un pintor para restaurar una capilla en forma de cilindro circular de radio 4 metros rematado por una cúpula con la forma del paraboloide $.z = 5 - \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8}$. Si el pintor pesa 160 lb. y sube con una lata de 25 lb. de pintura por una escalera helicoidal que rodea el cilindro, realizando exactamente dos revoluciones completas hasta llegar a la cúpula. ¿Cuanto trabajo realiza contra la gravedad al subir hasta la cúpula?

5. Si $\mathbb{F}$ es el campo de fuerza, con régimen de cuadrado inverso, definido por $\mathbb{F}(x, y, z) = \frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$ donde c es una constante positiva, calcule el trabajo realizado por $\mathbb{F}$ al desplazar una partícula a lo largo del segmento de recta desde el punto $(3, 0, 0)$ hasta el punto $(3, 0, 4)$. Evalúe la integral de línea mediante dos métodos: (a) utilice una función potencial para $\mathbb{F}$; (b) no emplee una función potencial para $\mathbb{F}$.

CAPÍTULO 6

INTEGRALES DE SUPERFICIE



Caminante son tus huellas
el camino, y nada más;
caminante, no hay camino,
se hace camino al andar.
ANTONIO MACHADO
"Proverbios y cantares "

En el capitulo anterior se tratarón integrales a lo largo de curvas, en este capitulo se tratará un concepto similar, integrales a través de superficies de $\mathbb{R}^3$..El objetivo de la siguiente sección será precisar el concepto de superficie, así como desarrollar algunas de sus características más elementales.

6.1. Superficies paramétrizadas y áreas

De la misma forma que en el caso de las curvas, las superficies serán aquellos conjuntos que se puedan ver como la imagen de una función derivable definida sobre ciertos
subconjuntos del plano.

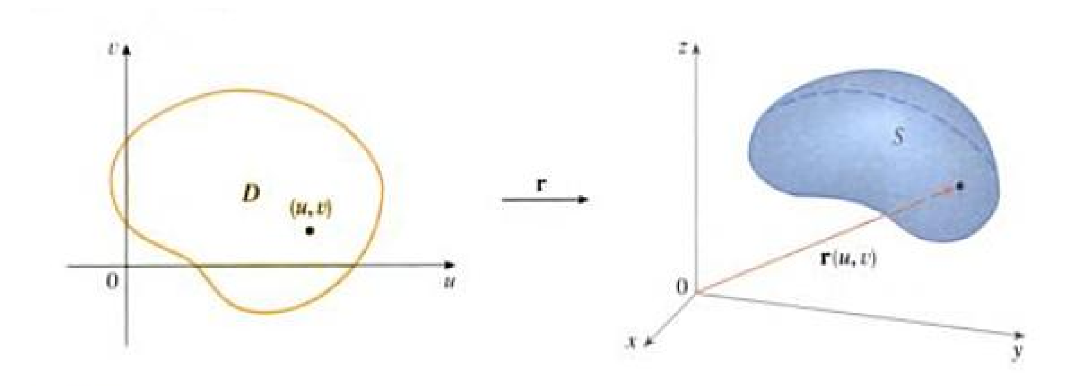
Si nos movemos sobre una curva solo podemos ir hacia atrás y hacia adelante siguiendo una dirección, por lo tanto es suficiente utilizar un parámetro para representar una curva. Para superficies podemos avanzar en dos direcciones, luego se necesitan dos parametros para su representación En general expresamos las coordenadas (x, y, z) de un punto en una superficie S en términos de dos parámetros u y v.

$x = F_1(u, v)$, $y = F_2(u, v)$, $z = F_3(u, v)$

Una superficie parametrizada es la representación paramétrica o vectorial por medio de una función $\boldsymbol{\tau}$ continua en un conjunto conexo D de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, tal que $\forall(u, v) \in D$

$\boldsymbol{\tau}(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$, o sea $\boldsymbol{\tau}(D) = S$

Nota : Existen muchas representaciones paramétricas de una misma superficie S, por ejemplo $\boldsymbol{\tau}(x, y) = [x, y, F(x, y)]$ tomando a x, y como parámetros.



Ejemplo 6.1.1 *Encontrar una ecuación parámetrica del hemisferio superior de la esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

La superficie es la gráfica del campo escalar $F(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$,

sobre la región plana $x^2 + y^2 \leq 1$

entonces $x = u$, $y = v$, $z = \sqrt{1 - u^2 - v^2}$

$\boldsymbol{\tau}(u, v) = \left[u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}\right]$

donde u, v *varian dentro del círculo unitario*

Para encontrar una parametrización sencilla de un plano que contiene a los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ no paralelos, y al punto P con vector posición $\mathbf{r}$. Podemos llegar a cualquier punto del plano comenzando en P y avanzando en forma paralela a $\mathbf{v}_1$ o a $\mathbf{v}_2$, sumando multiplos de $\mathbf{r}$, la ecuación paramétrica del plano que pasa por $\mathbf{r}$ y contiene a los dos vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ es $r(u,v) = \mathbf{r} + u\mathbf{v}_1 + v\mathbf{v}_2$

Ejemplo 6.1.2 *Hallar la ecuación parametrica del plano que pasa por* $(1,2,3)$ *y contiene a los vectores* $\mathbf{v}_1 = [2,3,1]$, $\mathbf{v}_2 = [1,-1,2]$

La ecuación parametrica es

$r(u,v) = [1,2,3] + u[2,3,1] + v[1,-1,2]$

o en forma equivalente

$x = 1 + 2u + v,\ y = 2 + 3u - v,\ z = 3 + u + 2v$

Para encontrar una parametrización de una superficie de revolución generada por la gráfica de una función $y = f(x)$ con $a \leq x \leq b$, cuando gira alrededor del eje x es $r(u,v) = [u, f(u)\cos v, f(u) sen v]$ con $a \leq u \leq b$, $0 \leq v \leq 2\pi$

Ejemplo 6.1.3 *Hallar la ecuación parametrica de la superficie de revolución generada por la gráfica de* $y = \dfrac{1}{x}$ *para* $1 \leq x \leq 10$

$$r(u,v) = \left[u, \frac{1}{u}\cos v, \frac{1}{u} sen v\right] \ con\ 1 \leq u \leq 10,\ 0 \leq v \leq 2\pi$$

En una superficie parametrizada, si se fija un parámetro y se deja que el otro varie, determina una curva de parámetro. Si la superficie está parametrizada por $\boldsymbol{\tau}(u,v) = [F_1(u,v), F_2(u,v), F_3(u,v)]$, existen dos familias de curvas de parámetro sobre la superficie, una familia con u constante $\boldsymbol{\tau}(u_0,v) = [F_1(u_0,v), F_2(u_0,v), F_3(u_0,v)]$ y otra con v constante.$\boldsymbol{\tau}(u,v_0) = [F_1(u,v_0), F_2(u,v_0), F_3(u,v_0)]$

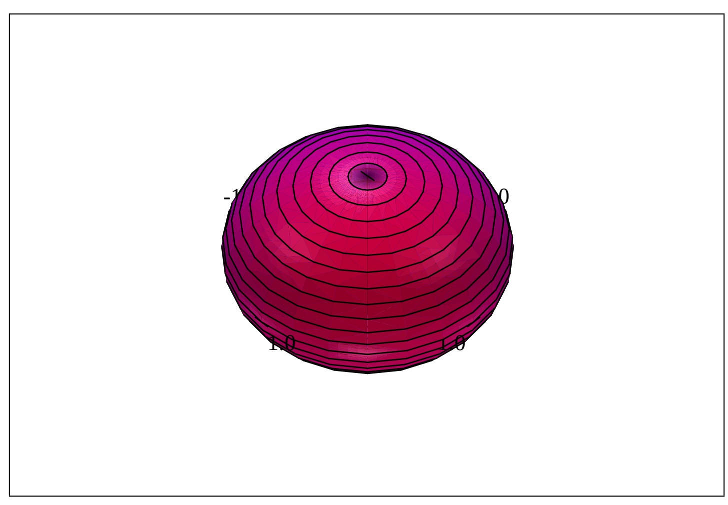
Ejemplo 6.1.4 *Describir la familia de curvas de parámetro para la esfera* $x^2+y^2+z^2 = 1$

Una parametrización facíl de la esfera es

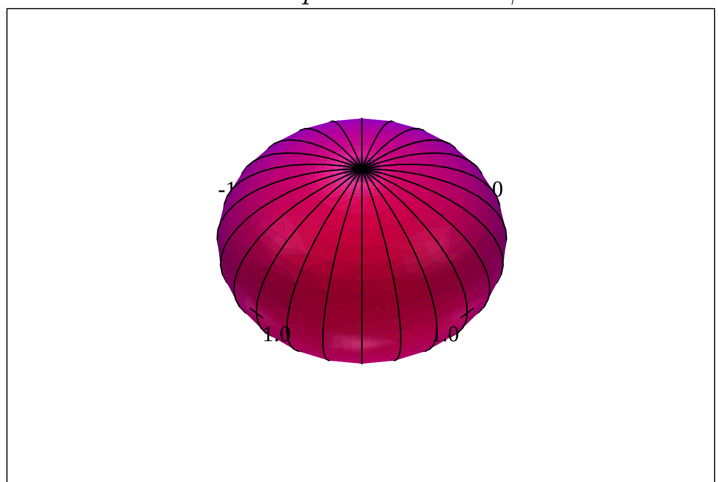
$x = sen\phi\cos\theta,\ y = sen\phi sen\theta,\ z = \cos\phi$

cordenadas esfericas con ρ *constante*

donde $0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi$



Familia de curvas de parámetro con ϕ constante



Familia de curvas de parámetro con θ constante

Propiedad 6.1.1 *Si S es una superficie paramétrizada por medio de una función τ de D conjunto conexo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ y*

i) Si τ es diferenciable entonces S es una superficie diferenciable

ii) Si τ es inyectiva entonces S es una superficie paramétrica simple.

iii) Si τ es constante entonces S es un punto. (Superficie degenerada).

iv) Si τ depende solamante de un parametro u o v, entonces S determina una curva.(superficie degenerada).

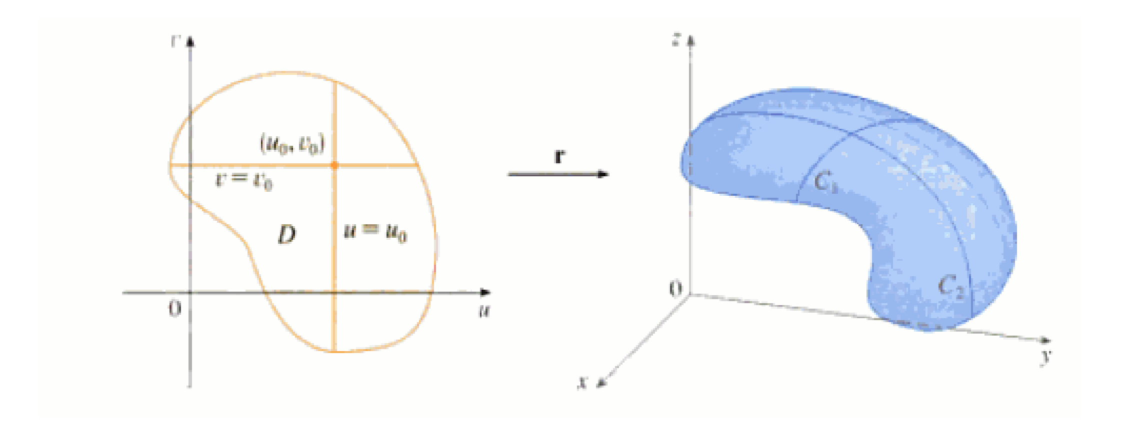
Así como la parametrización de una curva en general nos permite calcular vectores tangentes (y por lo tanto, rectas tangentes), una parametrización de una superficie también

nos proporciona la manera del calcular vectores normales a la superficie (y por lo tanto, planos tangentes).

En este curso nos limitaremos a considerar casi en exclusiva un caso especial de superficie en $\mathbb{R}^3$, llamado superficie paramétrica simple, que es el de una superficie S que puede describirse, en su totalidad, como $\tau(D)$, donde $\tau : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación inyectiva diferenciable.

Sea S es una superficie paramétrizada por medio de una función $\boldsymbol{\tau}$ de un conjunto D conexo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, diferenciable en (u_0, v_0) de D. Si fijamos u en u_0 obtenemos una función ψ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $\psi(u_0, t)$ determina una curva C_1 contenida en S, cuyo vector tangente en $\boldsymbol{\tau}(u_0, v_0)$ es $T_v(u_0, v_0) = \dfrac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial v}(u_0, v_0) = \left[\dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \dfrac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\right]$

De igual manera si fijamos v en v_0 obtenemos una función ϕ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $\phi(t, v_0)$ determina una curva C_2 totalmente contenida en S, cuyo vector tangente en $\boldsymbol{\tau}(u_0, v_0)$ es $T_u(u_0, v_0) = \dfrac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial u}(u_0, v_0) = \left[\dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \dfrac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\right]$



Si S es una superficie paramétrizada por medio de una función $\boldsymbol{\tau}$ de un conjunto D conexo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, diferenciable en (u_0, v_0) de D, entonces el vector $\boldsymbol{n} = T_u \times T_v$ es normal a la superficie S.

Una superficie S de $\mathbb{R}^3$ paramétrizada por medio de una función $\boldsymbol{\tau}$ de un conjunto D conexo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, se dice que es suave en $\boldsymbol{\tau}(u_0, v_0)$ si $\boldsymbol{n} = T_u \times T_v \neq \mathbb{O}$ en (u_0, v_0).

Si S es suave entonces $\boldsymbol{n}$ varia en forma continua en S

Nota : Si una superficie S es suave en $\boldsymbol{\tau}(u_0, v_0)$ entonces existe el plano tangente a S en (u_0, v_0).

Si S es una superficie paramétrizada por medio de una función $\boldsymbol{\tau}$ de un conjunto D conexo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, suave en $\boldsymbol{\tau}(u_0, v_0)$ entonces $\boldsymbol{n} = T_u \times T_v$ es normal a S en $\boldsymbol{\tau}(u_0, v_0)$ y $\boldsymbol{n} \bullet (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$ determina la ecuación del plano tangente a S en (x_0, y_0, z_0).

Si S es una superficie paramétrizada por medio de una función $\boldsymbol{\tau}$ de un conjunto D conexo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, diferenciable en D, entonces x, y y z son diferenciables en D y ademas $\dfrac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial v} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial u}$ es llamado producto vectorial fundamental.

Ejemplo 6.1.5 *Una superficie esta parametrizada por medio de* $\tau(u,v) = [2\cos v, 3senv, u]$. *Hallar la ecuación cartesiana de* S *y la ecuación del plano tangente a* S *en* $P = \left(1, \frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\right)$

La superficie es un cilindro eliptico cuya ecuación implicita es
$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
luego $\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial v} \times \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial u} = [-3Cosv, 2Senv, 0]$
Si $P = \left[1, \frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\right]$ *entonces* $u = 2$ *y* $v = \frac{\pi}{3}$
la normal del plano tangente en P *es igual a*
$\boldsymbol{n} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial v}\left(2, \frac{\pi}{3}\right) \times \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial u}\left(2, \frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \sqrt{3}, 0\right)$

Ejemplo 6.1.6 *entonces*
$\left(-\frac{3}{2}, \sqrt{3}, 0\right) \bullet \left(x - 1, y - \frac{3\sqrt{2}}{2}, z - 2\right) = 0$
$-3x + 2\sqrt{3}y = 3\sqrt{6} - 3$
es la ecuación del plano tangente a S *en* P

[1]

Para continuar con la descripción de las superficies, abordaremos el problema de deducir el área de una superficie S parametrizada por una función $\boldsymbol{\tau}$ de un conjunto D conexo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, la cual, dada la naturaleza del problema, supondremos que es simple. Procederemos de la siguiente manera: primero determinamos una partición P de D en rectángulos R_{ij} de lados $\triangle u$, $\triangle v$ los cuales usaremos para aproximar el àrea de la superficie S, ya que $\boldsymbol{\tau}(R_{ij}) = S_{ij} \subset S$. Nuestro intères ahora es calcular o aproximar lo mejor que se pueda el área de cada pedazo de superficie R_{ij} Si $R_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-,1}, v_j]$ es un rectángulo muy

---

[1]



Christiaan Huygens (14 de abril de 1629 - 8 de julio de 1695) fue un astrónomo, físico y matemático neerlandés, nacido en La Haya. Estudió mecánica y geometría con preceptores privados. En esta primera etapa, Huygens estuvo muy influido por el matemático francés René Descartes, visitante habitual de la casa de Constantin durante su estancia en Holanda. Y es que Huygens siempre criticó la teoría corpuscular de la luz y la ley de la Gravitación universal de Newton. Huygens fue uno de los pioneros en el estudio de la Probabilidad, tema sobre el que publicó el libro De ratiociniis in ludo aleae (Sobre los Cálculos en los Juegos de Azar), en el año 1656. En el introdujo algunos conceptos importantes en este campo, como la esperanza matemática, y resolvía algunos de los problemas propuestos por Pascal, Fermat y De Méré. Además resolvió numerosos problemas geométricos como la rectificación de la cisoide y la determinación de la curvatura de la cicloide. También esbozó conceptos acerca de la derivada segunda.

pequeño es de esperarse que el pedazo de superficie S_{ij} se parezca mucho al paralelogramo P_{ij} generado por los vectores $\tau(u_{i-1}, v_j) - \tau(u_{i-1}, v_{j-1})$ y $\tau(u_i, v_{j-1}) - \tau(u_{i-1}, v_{j-1})$ de tal forma que,

$Area(S_{ij}) \approx Area(P_{ij})$

$= \|(\tau(u_{i-1}, v_j) - \tau(u_{i-1}, v_{j-1})) \times (\tau(u_i, v_{j-1}) - \tau(u_{i-1}, v_{j-1}))\|$

recorriendo toda la partición

$Area(S_{ij}) \approx \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} \|(\tau(u_{i-1}, v_j) - \tau(u_{i-1}, v_{j-1})) \times (\tau(u_i, v_{j-1}) - \tau(u_{i-1}, v_{j-1}))\|$

Sea S es una superficie paramétrizada por medio de una función $\boldsymbol{\tau}$ de un conjunto D conexo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ y P una partición de D entonces P determina una partición de la superficie S en porciones de superficie S_{ij}

Si S es una superficie paramétrizada por medio de una función $\boldsymbol{\tau}$ de un conjunto D conexo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, diferenciable en D, entonces el área de S es igual a $A(S) = \int_S \int dS = \int_D \int \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial v} \times \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial u} \right\| dA = \int_D \int \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2} dA$

Si S es una superficie continua en una región R de $\mathbb{R}^2$ y ademas S esta determinada en forma explicita por un campo escalar $z = F(x,y)$ diferenciable en R, entonces el área de S es igual a $A(S) = \int_R \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)^2} dA$

Ejemplo 6.1.7 *Hallar el área de la porción de superficie* $z+2x^2+3y^2 = 1$ *que se encuentra dentro del cilindro* $4x^2 + 9y^2 = 1$

Despejando z *para hallar el área de* S *en forma explicita*

$z = 1 - 2x^2 - 3y^2$

entonces

luego $A(S) = \int_R \sqrt{1 + 16x^2 + 36y^2} dA$

modificando las coordenadas polares tenemos que

$x = \frac{rCos\theta}{2}$, $y = \frac{rSen\theta}{3}$

jacobiano de està transformaciòn es $j = \frac{r}{6}$

por lo tanto $4x^2 + 9y^2 = 4\left(\frac{rCos\theta}{2}\right)^2 + 9\left(\frac{rSen\theta}{3}\right)^2 = 1$

$A(S) = \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta$

$= \frac{1}{48} \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}(1 + 4r^2)^{3/2}{}_0^2 d\theta$

$= \frac{1}{72} \int_0^{2\pi} (5^{3/2} - 1) d\theta = \frac{(5^{3/2} - 1)}{72} \theta|_0^{2\pi} = \frac{(5^{3/2} - 1)\pi}{36}$

Ejercicios sección 6.1.

1. Encuentre una parametrización de la superficie.

   a) Cilindro circular de radio r, cuyo eje està a lo,largo del eje z, desde $z = 0$ hsta $z = h$

   b) Paraboloide $z = x^2 + y^2$ desde $z = 0$ hasta $z = k$

   c) Cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ desde $z = 0$ hasta $z = -k$

2. Hallar una ecuación parametrica del plano

   a) Que contiene a los puntos $(1, 1, 2)$, $(1, -2, 3)$ y $(0, 1, -2)$

   b) Que contiene al punto $(1, 2, 3)$ y tiene por normal a $[1, 1, -1]$

   c) Que contiene al punto $(0, 0, 0)$ y a los vectores $[1, 1, -1]$ y $[0, 2, 3]$

3. Hallar una ecuación parametrica de la superficie de revolución generada por la curva.de ecuación.

   a) $y = x^2$, alrededor del eje y

   b) $y = senx$, alrededor del eje x

   c) $y = \dfrac{1}{x}$, alrededor del eje x

4. Obtener la ecuación cartesiana de la superficie S paramétrizada por medio de $\boldsymbol{r}$

   a) $\boldsymbol{r}(u, v) = [2u - v, u + 2v, u - v]$

   b) $\boldsymbol{r}(u, v) = \left[v\sqrt{1 - u^2}, \sqrt{u^2 + v^2}, u\sqrt{1 + v^2}\right]$

   c) $\boldsymbol{r}(u, v) = [CosuCosv, SenuCosv, Senv]$

5. Curvas de parametro

6. Calcular el producto vectorial fundamental en terminos de u y v.para las superficies del numeral 4.

7. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie parametricamente definida por

   a) $\boldsymbol{r}(u, v) = [uCosv, uSenv, u]$ en el punto $P = (3, 4, 5)$

   b) $\boldsymbol{r}(u, v) = [uCosv, uSenv, u^2]$ en el punto $P = (1, -1, 2)$

   c) $\boldsymbol{r}(u, v) = \left[v\sqrt{1 - u^2}, \sqrt{u^2 + v^2}, u\sqrt{1 + v^2}\right]$ en el punto $P = \left(0, \sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

8. Hallar el área de las superficies del numeral 1, utilizando la forma parametrica.

9. Hallar el área de la superficie dada.

a) Semiesfera de radio 2

b) Porción del plano $x + y + z = 1$ que se encuentra en el primer octante

c) Porción del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre $z = 1$ y $z = 2$

10. Utilizando un CAS encuentre el área de una superficie dada.

6.2. Integrales de superficie de campos escalares

Sea F un campo escalar de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ y sea S una superficie simple parametrizada por medio de una función $\boldsymbol{\tau}$ de un conjunto D conexo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ se dice que F es un campo escalar escalonado en D si existe una partición P de S, tal que en cada S_{ij} de P, F es constante.$\forall(x, y, z) \in S_{ij}$, entonces se define la integral de superficie de F a lo largo de S como

$\int_S \int F(x, y, z)dS = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} k_{ij}A_{ij}$, donde A_{ij} es el área de la porción de superficie S_{ij}

Si F es un campo escalar de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ definido y acotado en una superficie simple S parametrizada por medio de una función $\boldsymbol{\tau}$ de un conjunto D conexo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ si para todos los campos escalares ϕ y ψ escalonados en S tales que

$\int_S \int \phi(x, y, z)dS \leq I \leq \int_S \int \psi(x, y, z)dS$, con $\phi(x, y, z) \leq F(x, y, z) \leq \psi(x, y, z)$ $\forall(x, y, z) \in S$

Para un único número real I, se dice que F es integrable sobre S y ademas $I = \int_S \int F(x, y, z)dS$

Si F es un campo escalar de en definido y acotado en una superficie simple S parametrizada por medio de una función de τ de un conjunto conexo D de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, entonces $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} F(x^*, y^*, z^*)\triangle S_{ij}$ para cualquier $(x^*, y^*, z^*) \in S_{ij}$ determina una suma de Rieman de F en P.

Si F es un campo escalar de $\mathbb{R}^3$en $\mathbb{R}$ continuo en una superficie simple S parametrizada por medio de una función τ de un conjunto D conexo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, entonces

$\int_S \int F(x, y, z)dS = \lim\limits_{\triangle S_{ij} \to 0} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} F(x^*, y^*, z^*)\triangle S_{ij}$, se denomina integral de superficie de F a lo largo de S siempre que el limite dado exista.

Notación : $\int_S \int F(x, y, z)dS = \int_D \int F(\boldsymbol{\tau}(u, v)) \left\| \dfrac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial v} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial v} \right\| dA$

Si la superficie esta definida en forma explicita en xy, $\int_S \int F(x, y, z)dS = \int_{R_{XY}} \int F(x, y, z(x, y$

Propiedad 6.2.1 *Si F y G son campos escalares de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ continuos en una superficie simple S parametrizada por medio de una función $\boldsymbol{\tau}$ de un conjunto D conexo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, entonces*

(i) Si S es una superficie cerrada $\int_S \int F(x,y,z)dS = \int_S \int F(x,y,z)dS$
(ii) Si $S = S_1 \cup S_2$ $\int_S \int F(x,y,z)dS = \int_{S_1} \int F(x,y,z)dS + \int_{S_2} \int F(x,y,z)dS$

Ejemplo 6.2.1 *Calcular la integral de superficie* $\int_S \int (x+y+z)dS$ *si* S *es el cono* $z = \sqrt{x^2+y^2}$ *con tapa* $z = 3$

Se deben calcular dos integrales de superficie, la de la tapa y la del cono.
(i) *Para la tapa* $z = 3$, $dS = \sqrt{0+0+1}dA$
la proyección de la tapa en el plano xy *es el circulo* $x^2+y^2 = 9$
calculamos la integral en coordenadas polares
$\int_0^3 \int_0^{2\pi} (rCos\theta + rSen\theta + 3)rd\theta dr$
$= \int_0^3 \int_0^{2\pi} (r^2Cos\theta + r^2Sen\theta + 3r)d\theta dr$
$= \int_0^3 (r^2Sen\theta - r^2Cos\theta + 3r\theta)|_0^{2\pi} dr$
$= \int_0^3 (0 - r^2 + 6\pi r - 0 + r^2 - 0)dr$
$= \int_0^3 6\pi r dr = 3\pi r^2|_0^3 = 27\pi$

(ii) *Para el cono* $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $dS = \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+y^2} + \dfrac{y^2}{x^2+y^2} + 1dA} = \sqrt{2}dA$
la proyección de la tapa en el plano xy *es el circulo* $x^2+y^2 = 9$
calculamos la integral en coordenadas polares
$\int_0^3 \int_0^{2\pi} (rCos\theta + rSen\theta + r)rd\theta dr$
$= \int_0^3 \int_0^{2\pi} (r^2Cos\theta + r^2Sen\theta + r^2)d\theta dr$
$= \int_0^3 (r^2Sen\theta - r^2Cos\theta + r^2\theta)|_0^{2\pi} dr$
$= \int_0^3 (0 - r^2 + 2\pi r^2 - 0 + r^2)dr$
$= \int_0^3 2\pi r^2 dr = \dfrac{2\pi r^3}{3}|_0^3 = 18\pi$
luego $\int_S (x+y+z)dS = 45\pi$

2

2



Henri Léon Lebesgue (28 de junio de 1875 - 26 de julio de 1941), matemático francés. Nació en Beauvais, Oise, Picardie, Francia. Estudió en la Ecole Normale Supérieure y en el período 1899 - 1902 impartió clases en el Liceo de Nancy. Con base en el trabajo de otros matemáticos, entre ellos Émile Borel y Camille Jordan, Lebesgue formuló la teoría de la medida en 1901. Al año siguiente definió la integral de Lebesgue, la cual generaliza la noción de la integral de Riemann al extender el concepto de área bajo una curva para incluir funciones discontinuas. Este es uno de los logros del análisis moderno que expande el alcance del análisis de Fourier. Lebesgue dio a conocer este desarrollo en su disertación "Intégrale, longueur, aire"("Integral, longitud, área") presentada en la Universidad de Nancy en 1902. Además de aproximadamente 50 artículos, escribió dos libros: Leçons sur l'intégration et la recherché des fonctions primitives (1904) y Leçons sur les séries trigonométriques (1906). A su vez, contribuyó en otras áreas de matemáticas como topología, teoría del potencial y análisis de Fourier.

Las interpretaciones físicas de estas integrales son variadas. Por ejemplo, un campo escalar F puede representar la densidad de masa por unidad de superficie de un material de grosor despreciable que está distribuido sobre una superficie S, y entonces $\int_S \int F(x,y,z)dS$ sería la masa total de dicho material.

Aplicaciones fisicas

(i) Masa de una lamina de $\mathbb{R}^3$

Si una lamina en $\mathbb{R}^3$ esta determinada por una superficie S de $\mathbb{R}^3$ y ademas su densidad en cada punto $P = (x,y,z) \in S$ es $\delta(x,y,z)$, entonces la masa de S es igual a

$M = \int_S \int \delta(x,y,z)dS$

(ii) Primeros momentos de una lamina

Respecto al plano XY $\quad M_{XY} = \int_S \int z\delta(x,y,z)dS$

Respecto al plano YZ $\quad M_{YZ} = \int_S \int x\delta(x,y,z)dS$

Respecto al plano XZ $\quad M_{XZ} = \int_S \int y\delta(x,y,z)dS$

(iii) Centro de masas de una lamina

$CM = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \left(\frac{M_{YZ}}{M}, \frac{M_{XZ}}{M}, \frac{M_{XY}}{M}\right)$

Teorema 6.2.1 *del valor medio para integrales de superficie. Si F es un campo escalar de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ continuo en una superficie S simple parametrizada por medio de una función τ de un conjunto conexo D de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, entonces existe $(a,b,c) \in S$ tal que* $F(a,b,c) = \dfrac{\int_S \int F(x,y,z)dS}{\int_S \int dS}$

Ejercicios sección 6.2.

1. Calcule la integral de superficie del campo escalar F sobre S

   a) $F(x,y,z) = 2x + 3y$, S es la parte del plano $2x + 3y + z = 6$ que queda en el primer octante

   b) $F(x,y,z) = 3x - y$, S es la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ entre $z = -1$ y $z = 1$

   c) $F(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ S es la porción de paraboloide $2z = x^2 + y^2$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2y$

2. Calcule la integral de superficie del campo escalar F sobre S

   a) $F(x,y) = x - y$, S esta determinada por $\tau(u,v) = \left[u, v, \dfrac{v}{2}\right]$ con $0 \leq u \leq 1$ y $0 \leq v \leq 2$

   b) $F(x,y) = xy$, S esta determinada por $\tau(u,v) = [u, v, uv]$ con $0 \leq u \leq 1$ y $0 \leq v \leq 1$

   c) $F(x,y) = x + y$, S esta determinada por $\tau(u,v) = [u, 3\cos v, 3senv]$ con $0 \leq u \leq 4$ y $0 \leq v \leq \pi/2$

3. Hallar la masa de una lamina cuya forma es igual a la superficie S, con densidad en cada punto igual a δ

   a) S está determinada por $2x+3y+6z=12$ en el primer octante y $\delta(x,y,z)=x+y$

   b) S está determinada por $z=2-x^2-y^2$ con $z\geq 0$y $\delta(x,y,z)=x^2+y^2$

   c) S está determinada por $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ y $\delta(x,y,z)=kz$

4. Hallar las coordenadas del centro de masas de las laminas del numeral 3.

5. Hallar el valor promedio del campo escalar F sobre la superficie S.

   a) $F(x,y,z)=x+y+z$, S es la porción del plano $x+y+z=1$ en el primer octante.

   b) $F(x,y,z)=x+z$, S es la porción del cilindro $y^2+z^2=9$ entre $x=0$ y $x=4$.

   c) $F(x,y,z)=y^2$, S es la porción de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ dentro del cilindro $x^2+y^2=1$ con $z\geq 0$

6. Utilizando un CAS encuentre el valor promedio de un campo escalar F sobre una superficie S.

6.3. Integrales de superficie de campos vectoriales

Una superficie S de $\mathbb{R}^3$ se dice que es orientable, si es posible determinar en ella dos lados, el lado exterior (o positivo) y el lado interior (o negativo).

Si $\mathbb{F}$ es un campo vectorial de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ continuo en una superficie orientable S parametrizada por medio de una función $\boldsymbol{\tau}$ de un conjunto D conexo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\int_S \mathbb{F}(x,y,z)\bullet \mathbb{N}dS=\int_S \mathbb{F}(\boldsymbol{\tau}(u,v))\bullet \mathbb{N}\left\|\frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial v}\times\frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial u}\right\|dS$$

donde $\mathbb{N}$ es un vector normal unitario exterior a S

determinado por $\mathbb{N}=\dfrac{\frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial v}\times\frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial u}}{\left\|\frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial v}\times\frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial u}\right\|}$

luego

$$\int_S \mathbb{F}(x,y,z)\bullet \mathbb{N}dS=\int_S \mathbb{F}(\boldsymbol{\tau}(u,v))\bullet\left(\frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial v}\times\frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial u}\right)dS$$

determina la integral de $\mathbb{F}$ sobre S, siempre que exista la integral de la derecha.

Si la superficie S esta definida en forma explicita en XY por $z=G(x,y)$
entonces $H(x,y,z)=z-G(x,y)$ define a S en forma implicita
luego

$$\mathbb{N}=\frac{\nabla H(x,y,z)}{\|\nabla H(x,y,z)\|}$$

y $\int_S \mathbb{F}(x,y,z)\cdot\mathbb{N}dS=$

$= \int_{R_{XY}} \mathbb{F}(x,y,z(x,y)) \bullet \dfrac{\nabla H(x,y,z)}{\|\nabla H(x,y,z)\|} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)^2} dA$

Nota : La integral de superficie de un campo vectorial, tambien se denomina integral de flujo de $\mathbb{F}$ sobre S

Por su parte, la integral de un campo vectorial sobre una superficie S suele interpretarse como el flujo de un fluido que pasa a través de S. Puede imaginarse que S es una membrana porosa. El flujo se puede definir como el volumen de fluido que cruza la superficie por unidad de tiempo. [3]

Propiedad 6.3.1 *Si $\mathbb{F}$ es un campo vectorial de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ continuo en una superficie S orientable parametrizada por medio de una función τ de un conjunto conexo D de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, entonces*

(i) Si $\mathbb{F} = [F_1, F_2, F_3]$ entonces

$\int_S \mathbb{F}(x,y,z) \bullet \mathbb{N} dS$

$= \int_S \mathbb{F}(\boldsymbol{\tau}(u,v)) \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} dS + \int_S \mathbb{F}(\boldsymbol{\tau}(u,v)) \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} dS + \int_S \mathbb{F}(\boldsymbol{\tau}(u,v)) \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} dS$

o tambien

$\int_S \mathbb{F}(x,y,z) \bullet \mathbb{N} dS$

$= \int_S F_1(x,y,z) \bullet N_1 dS + \int_S F_2(x,y,z) \bullet N_2 dS + \int_S F_3(x,y,z) \bullet N_3 dS$

(ii) Si $\mathbb{N} = [Cos\alpha, Cos\beta, Cos\chi]$

$\int_S \mathbb{F}(x,y,z) \bullet \mathbb{N} dS = \int_S (F_1 Cos\alpha + F_2 Cos\beta + F_3 Cos\chi) dS$

En función de los cosenos directores.

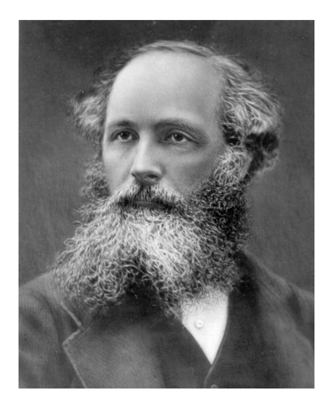
Ejemplo 6.3.1 *Calcule el flujo de $\mathbb{F}(x,y,z) = [x,y,z]$ a través de la parte del plano $2x + 3y + z = 6$ que se encuentra en el primer octante.*

La superficies ya esta en forma implicita, por lo tanto

$H(x,y,z) = 2x + 3y + z = 6$

$\mathbb{N} = \dfrac{[2,3,1]}{\sqrt{14}}$

[3]



James Clerk Maxwell (Edimburgo, 13 de junio de 1831- Cambridge, Reino Unido, 5 de noviembre de 1879). Físico escocés conocido principalmente por haber desarrollado la teoría electromagnética clásica, sintetizando todas las anteriores observaciones, experimentos y leyes sobre electricidad, magnetismo y aun sobre óptica, en una teoría consistente.[1] Las ecuaciones de Maxwell demostraron que la electricidad, el magnetismo y hasta la luz, son manifestaciones del mismo fenómeno: el campo electromagnético. Desde ese momento, todas las otras leyes y ecuaciones clásicas de estas disciplinas se convirtieron en casos simplificados de las ecuaciones de Maxwell. Maxwell fue una de las mentes matemáticas más preclaras de su tiempo, y muchos físicos lo consideran el científico del siglo XIX que más influencia tuvo sobre la física del siglo XX habiendo hecho contribuciones fundamentales en la comprensión de la naturaleza. Muchos consideran que sus contribuciones a la ciencia son de la misma magnitud que las de Isaac Newton y Albert Einstein.

entonces

$\int_S \mathbb{F}(x,y,z) \bullet \mathbb{N}dS = \int_{R_{XY}} \int [x,y,6-2x-3y] \bullet \dfrac{[2,3,1]}{\sqrt{14}}\sqrt{14}dA$

$= \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2}{3}X} 6dydx$

$= \int_0^3 (12-4x)dx$

$= 12x - 2x^2|_0^3 = 36 - 18 = 18$

Ejercicios sección 6.3.

1. Calcule el flujo de $\mathbb{F}$ a tráves de S, donde $\mathbb{N}$ es la normal unitaria que apunta hacia afuera.

   a) $\mathbb{F}[x,y,z] = [x, x+y, x+y+z]$ S es la porción del plano $x+y+z=1$ que se encuentra en el primer octante.

   b) $\mathbb{F}[x,y,z] = [x,y,z]$ S es el cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ entre $z=0$ y $z=2$

   c) $\mathbb{F}[x,y,z] = [x,-y,z^2]$, S es el paraboloide $z = x^2+y^2$ acotado por el plano $z=4$

2. Calcule el flujo de $\mathbb{F}$ a tráves de S, donde $\mathbb{N}$ es la normal unitaria que apunta hacia afuera.

   a) $\mathbb{F}[x,y,z] = [x,y,0]$, S esta determinada por $\tau(u,v) = [2u, u+v, 1+u-v]$ con $0 \leq u \leq 1$ y $0 \leq v \leq 1$

   b) $\mathbb{F}[x,y,z] = z\mathbf{k}$, S esta determinada por $\tau(u,v) = \tau(u,v) = [u+v, u-v, u^2+v^2]$ con $0 \leq u \leq 1$ y $0 \leq v \leq 1$

   c) $\mathbb{F}[x,y,z] = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$, S esta determinada por $\tau(u,v) = [3senu, 3\cos u, v]$ con $0 \leq u \leq \pi$ y $0 \leq v \leq 1$

3. Calcule el flujo de $\mathbb{F}$ a tráves de la superficie cerrada$S$, donde $\mathbb{N}$ es la normal unitaria que apunta hacia afuera.

   a) $\mathbb{F}[x,y,z] = [4xy, -z^2, yz]$ S es un cubo de lado 1.

   b) $\mathbb{F}[x,y,z] = [yz, xz, xy]$ S es el elipsoide $x^2+2y^2+3z^2=6$

   c) $\mathbb{F}[x,y,z] = [x,y,z]$ S es la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$

4. Utilizando un CAS encuentre el flujo $\mathbb{F}$ a tráves de una superficie S.

6.4. Teorema de Stokes

En esta sección estudiaremos el teorema de Stokes[4], que es una generalización del teorema de Green en cuanto que relaciona la integral de un campo vectorial sobre una curva cerrada que es borde de una superficie paramétrica simple con la integral de su rotacional en dicha superficie, luego el teorema de Stokes puede considerarse como una versión del teorema de Green para una dimensión más alta. El teorema de Stokes relaciona una integral de superficie sobre una superficie S con una integral de línea alrededor de la curva frontera de S (que es una curva en el espacio). La orientación de S induce la orientación positiva de la curva frontera C. Esto significa que si uno camina alrededor de C en sentido positivo entonces la superficie siempre estará a la izquierda de uno.

Si $\mathbb{F}$ es un campo vectorial de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ diferenciable en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ entonces el rotacional de $\mathbb{F}$ ($rot\mathbb{F}$) es igual a:

$$\nabla \times \mathbb{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right]$$

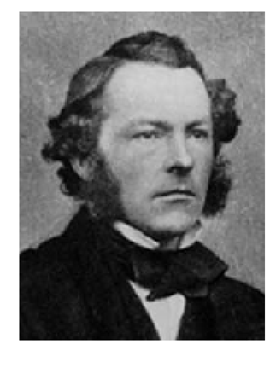
El rotacional mide la circulación de un campo vectorial.

Ejemplo 6.4.1 *Hallar el rótacional del campo vectorial* $\mathbb{F}(x,y,z) = [3xy^2 + z^3, xyz + 1, 2x^3y +$
$\nabla \times \mathbb{F}(x,y,z) = [2x^3 + z^3 - xy, 3z^2 6x^2 y, yz - 6xy]$

Propiedad 6.4.1 *Si $\mathbb{F}$ y $\mathbb{G}$ son campos vectoriales de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ diferenciables, entonces:*
i) $\nabla \times (\mathbb{F} \pm \mathbb{G})(x,y,z) = \nabla \times \mathbb{F}(x,y,z) \pm \nabla \times \mathbb{G}(x,y,z)$
ii) $\nabla \times (k\mathbb{F})(x,y,z) = k\nabla \times \mathbb{F}(x,y,z)$, *$k$ constante*
iii) $\nabla \times (\mathbb{F} \cdot \mathbb{G})(x,y,z) = (\nabla \times \mathbb{F}(x,y,z)) \cdot \mathbb{G}(x,y,z) + \mathbb{F}(x,y,z) \cdot (\nabla \times \mathbb{G}(x,y,z))$
iv) $\nabla \times \left(\dfrac{\mathbb{F}}{\mathbb{G}}\right)(x,y,z) = \dfrac{(\nabla \times \mathbb{F}(x,y,z)) \cdot \mathbb{G}(x,y,z) - \mathbb{F}(x,y,z) \cdot (\nabla \times \mathbb{G}(x,y,z))}{\mathbb{G}^2(x,y,z)}$

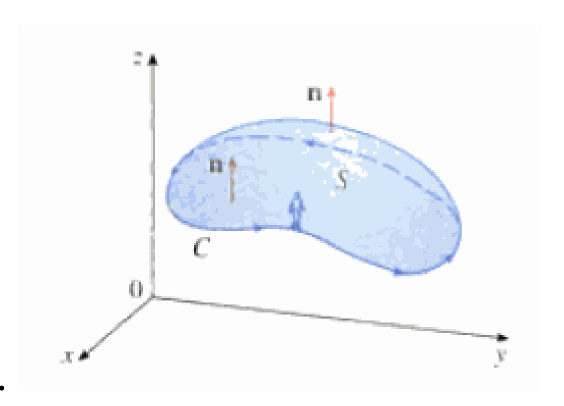
Un campo vectorial $\mathbb{F}$ que no posee rotacional se denomina irrotacional y $\nabla \times \mathbb{F}(x,y,z) = \mathbf{0}$ en todos los puntos (x,y,z) que está definido $\mathbb{F}$.


[4]



Sir George Gabriel Stokes, primer Baronet (13 de agosto de 1819-1 de febrero de 1903) fue un matemático y físico irlandés que realizó contribuciones importantes a la dinámica de fluidos (incluyendo las ecuaciones de Navier-Stokes), la óptica y la física matemática (incluyendo el teorema de Stokes). Fue secretario y luego presidente de la Royal Society de Inglaterra. El trabajo de Stokes se distingue por su precisión y su sentido de la finalidad. Incluso en problemas que en su tiempo no se consideraban susceptibles de análisis matemático, Stokes fue capaz en muchos casos de aportar soluciones que dejaron sentadas las bases para el progreso posterior. Este hecho se explica por su extraordinaria combinación de capacidad matemática y habilidad experimental.

Teorema 6.4.1 *de Stokes (del rotacional). Si C es una curva regular a trozos cerrada y simple que determina la frontera de una superficie S y sea $\mathbb{N}$ un vector normal a S y $\mathbb{T}$ un vector tangente unitario a C y si $\mathbb{F}$ es un campo vectorial diferenciable en una bola abierta B de $\mathbb{R}^3$ que contiene a S entonces $\oint_C \mathbb{F}(x,y,z) \bullet \mathbb{T} dS = \int_S \nabla \times \mathbb{F}(x,y,z) \bullet \mathbb{N} dS$*



Demostración.

Basta demostrar que

$\oint_C F_1(x,y,z)dx = \int_S \nabla \times F_1(x,y,z)\boldsymbol{i} \bullet \mathbb{N} dS$

$\oint_C F_2(x,y,z)dy = \int_S \nabla \times F_2(x,y,z)\boldsymbol{j} \bullet \mathbb{N} dS$

$\oint_C F_3(x,y,z)dz = \int_S \nabla \times F_3(x,y,z)\boldsymbol{k} \bullet \mathbb{N} dS$

La representación explicita de S puede ser así :

$z = G_1(x,y)$, $y = G_2(x,z)$, $x = G_3(y,z)$

donde G_1, G_2 y G_3 son campos escalares de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ uniformes, continuos y diferenciables en una región R de $\mathbb{R}^2$ (Proyección de S en alguno de los planos coordenados)

Si consideramos a S en forma explicita como $z = G_1(x,y)$ su representación paramétrica sería $\boldsymbol{r}(x,y) = [x, y, z(x,y)]$

tal que $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}(x,y) = [0,1,]\ \dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)$

es un vector tangente a S y ortogonal a $\mathbb{N}$,

luego $\left(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right) \bullet \mathbb{N} = \boldsymbol{j} \bullet \mathbb{N} + \boldsymbol{k} \bullet \mathbb{N}\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 0$

$\boldsymbol{j} \bullet \mathbb{N} = -\boldsymbol{k} \bullet \mathbb{N}\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y)$

Hallemos ahora $\int_S \nabla \times F_1(x,y,z)\boldsymbol{i} \bullet \mathbb{N} dS$

$$\nabla \times F_1(x,y,z)\boldsymbol{i} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1(x,y,z) & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z)\boldsymbol{j} - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

$$\nabla \times F_1(x,y,z)\boldsymbol{i} \bullet \mathbb{N} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z)\boldsymbol{j} - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z)\boldsymbol{k}\right) \bullet \mathbb{N}$$

$$= \frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z)\boldsymbol{j} \bullet \mathbb{N} - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z)\boldsymbol{k} \bullet \mathbb{N}$$

$= -\dfrac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z)\boldsymbol{k} \bullet \mathbb{N}\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z)\boldsymbol{k} \bullet \mathbb{N}$

$= -\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z)\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y) + \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z)\right)\boldsymbol{k} \bullet \mathbb{N}$

$\dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z)\dfrac{\partial x}{\partial y} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z)\dfrac{\partial y}{\partial y} + \dfrac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z)\dfrac{\partial z}{\partial y}$

$= \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) + \dfrac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z)\dfrac{\partial z}{\partial y}$

Por lo tanto

$\int_S \nabla \times F_1(x,y,z)\boldsymbol{i} \bullet \mathbb{N}dS = -\int_R \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z)dA$

aplicando el teorema de Green

$-\int_R \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z)dA = \oint_C F_1(x,y,z)dx$

De igual forma se demuestran las otras dos igualdades.

Quedan a cargo del lector. ■

Teorema 6.4.2 *Si $\mathbb{F}$ es un campo vectorial de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ diferenciable en una región simplemente conexa de $\mathbb{R}^3$, entonces $\nabla\times\mathbb{F}(x,y,z) = \mathbf{0}$ en S si y solamente si $\oint_C \mathbb{F}(x,y,z) \bullet \mathbb{T}d\alpha = 0$ para toda curva regular, cerrada y simple C en S*

Demostración. Como C es una curva regular, cerrada y simple

suficiente demostrar que

$\oint_C \mathbb{F}(x,y,z) \bullet \mathbb{T}d\alpha = 0$

Aplicando el teorema de Stokes

$\int_S \nabla \times \mathbb{F}(x,y,z) \bullet \mathbb{N}dS = \oint_C \mathbb{F}(x,y,z) \bullet \mathbb{T}d\alpha = 0$

luego

$\int_S \nabla \times \mathbb{F}(x,y,z) \bullet \mathbb{N}dS = 0$ ■

Ejemplo 6.4.2 *Comprobar elteorema de Stokes para $\mathbb{F}(x,y,z) = [-y+z, x-z, x-y]$ sobre la superficie determinada por $z = 4 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$*

La curva C es el circulo $x^2 + y^2 = 4$ cuya parametrización es

$\alpha(t) = [2Cost, 2Sent]$ *con* $0 \leq t \leq 2\pi$ *y* $\alpha\prime(t) = [-2Sent, 2Cost]$

luego

$\oint_C \mathbb{F}(x,y,z) \bullet \mathbb{T}d\alpha$

$= \int_0^{2\pi}[-2Sent, 2Cost, 2Cost - 2Sent][-2Sent, 2Cost, 0]dt$

$= \int_0^{2\pi}(4Sen^2t + 4Cos^2t)dt = 4\int_0^{2\pi} dt = 4t|_0^{2\pi} = 8\pi$

Ahora calculamos la integral de superficie sobre S

$\int_S \nabla \times \mathbb{F}(x,y,z) \bullet \mathbb{N}dS$

tal que

$$\nabla \times \mathbb{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y+z & x-z & x-y \end{vmatrix} = [0,0,2]$$

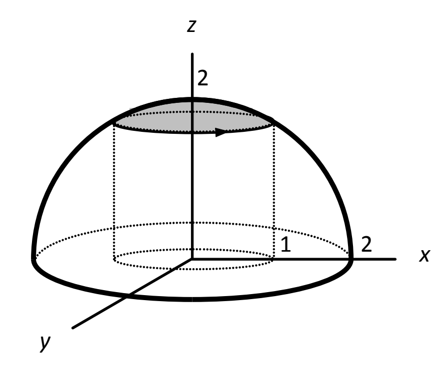
$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$$

luego

$\int_R [0,0,2][2x,2y,1]dA = \int_R 2dA$

$\int_0^2 \int_0^{2\pi} 2rd\theta dr = \int_0^2 2r\theta|_0^{2\pi} dr = \int_0^2 4\pi r dr = 2\pi r^2|_0^2 = 8\pi$

Ejemplo 6.4.3 *Calcular la circulación del campo de velocidades de un fluido* $\mathbb{F}(x,y,z) = [\tan^{-1}(x^2), 3x, e^{3z}\tan z]$ *a lo largo de la intersección entre la esfera* $x^2+y^2+z^2=4$ *con el cilindro* $x^2+y^2=1$*, con* $z>0$



Utilizando el teorema de Stokes

$\nabla \times \mathbb{F}(x,y,z) = [0,0,3]$

$$\mathbb{N} = \frac{[2x,2y,2z]}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}} = \frac{[2x,2y,2z]}{4} = \frac{[x,y,z]}{2} = \frac{\left[x,y,\sqrt{4-x^2-y^2}\right]}{2}$$

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-2y}{2\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2} dA$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} dA$$

luego $\int_S \nabla \times \mathbb{F}(x,y,z) \bullet \mathbb{N} dS =$

$$= \int_R \int [0,0,3] \frac{\left[x,y,\sqrt{4-x^2-y^2}\right]}{2} \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} dA$$

$= \int_R \int 3dA$

$= 3\pi$

Ejercicios sección 6.4.

1. Encuentre el rotacional del campo vectorial $\mathbb{F}$

   a) $\mathbb{F}(x,y,z) = [xyz, yz, z]$

   b) $\mathbb{F}(x,y,z) = e^x seny\mathbf{i} + e^x \cos y\mathbf{j}$

   c) $\mathbb{F}(x,y,z) = e^{-xyz}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$

2. Para el campo vectorial $\mathbb{F}$, halle $\nabla \times (\nabla \times \mathbb{F})$

   a) $\mathbb{F}(x,y,z) = xyz\mathbf{i}$

   b) $\mathbb{F}(x,y,z) = \cos xz\mathbf{i} - senyz\mathbf{k}$

   c) $\mathbb{F}(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$

3. De un ejemplo de un campo vectorial $\mathbb{F}$ que sea irrotacional.

4. Comprobar el teorema de Stokes para el campo vectorial $\mathbb{F}$, sobre la superficie S

   a) $\mathbb{F}(x,y,z) = [3y, 4z, -6x]$ si S es la porción del paraboloide $z = 9 - x^2 - y2$ que se encuentra encima del plano XY

   b) $\mathbb{F}(x,y,z) = [2xy+z, y^2, -x-3y]$ si S es la superficie acotada por $2z = x^2+y^2$ y $z = 2$

   c) $\mathbb{F}(x,y,z) = [y, z, x]$ si S es la porción del plano $x+y+z = 1$ que se encuentra en el primer octante.

   d) $\mathbb{F}(x,y,z) = [y^3, x^3, -z^3]$ si S es la porción del plano $x+y+z = 1$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

   e) $\mathbb{F}(x,y,z) = [x^2, y^2, z]$ si S es la semiesfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ con $z \geq 0$

5. Utilice el teorema de Stokes para evaluar la integral dada.

   a) $\oint_C [xy, yz, zx] d\alpha$ si C es el trángulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$.

   b) $\oint_C [z^2, x^2, y^2] d\alpha$ si S es la porción del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que se encuentra encima del plano XY

   c) $\oint_C [x^2, z^2, -xyz] d\alpha$ si S es la semiesfera $z = \sqrt{1 - x^2y^2}$

   d) $\oint_C [Cosy + yCosx, Senx - xSeny, xyz] d\alpha$ si S es la porción de superficie $z = y^2$ encima del cuadrado con vértices en $(0,0,0)$, $(k,0,0)$, $(k,k,0)$ y $(0,k,0)$.

   e) $\oint_C [y-z, z-x, x-y] d\alpha$ si C es la curva intersección entre el cilindro $x^2+y^2 = 1$ y el plano $x + z = 1$

6. Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbb{F}$ para mover una particula a lo largo de la curva C

   a) $\mathbb{F}(x,y,z) = [y+z, z+x, x+y]$, C intersección entre el cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ y el plano $y = z$

   b) $\mathbb{F}(x,y,z) = [y, z, x]$ C intersección entre la esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$ y el plano $x + y + z = 0$

7. Calcular la integral dada $\oint_C [x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy] d\alpha$ si C es cualquier camino cerrado.

8. Sea C es una curva cerrada que determina la frontera de una superficie simple S y sea $\mathbb{F}$ un campo vectorial definido en S. Si $\nabla\mathbb{F}$ es tangente a S en cada punto, demuestre que $\oint_C (\nabla \times \mathbb{F}) d\alpha = 0$

9. Sea C es una curva cerrada que determina la frontera de una superficie S y sean F y G dos campos escalares de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ de clase 2., demuestre que $\oint_C (F\nabla G + G\nabla F) d\alpha = 0$

10. Utilice un CAS para representar el rotacional de un campo vectorial.

6.5. Teorema de Gauss

El teorema de Gauss[5] de la divergencia, que puede verse como una versión tridimensional del teorema de Green, al relacionar la integral de un campo vectorial en una superficie cerrada que es borde de un sólido tridimensional con la integral de su divergencia en el interior de dicho sólido.

Si $\mathbb{F}$ es un campo vectorial de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ diferenciable en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ entonces la divergencia de $\mathbb{F}$ ($\operatorname{div}\mathbb{F}$) es igual a:

$$\nabla \cdot \mathbb{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_1(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial F_3(x, y, z)}{\partial z}$$

Ejemplo 6.5.1 *Hallar el rótacional del campo vectorial* $\mathbb{F}(x, y, z) = [3xy^2 + z^3, xyz + 1, 2x^3y + yz^3]$

$\nabla \times \mathbb{F}(x, y, z) = 3y^2 + xz + 3yz^2$

Propiedad 6.5.1 *Si $\mathbb{F}$ y $\mathbb{G}$ son campos vectoriales de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ diferenciables, entonces:*

i) $\nabla \cdot (\mathbb{F} \pm \mathbb{G})(x, y, z) = \nabla \cdot \mathbb{F}(x, y, z) \pm \nabla \cdot \mathbb{G}(x, y, z)$

5

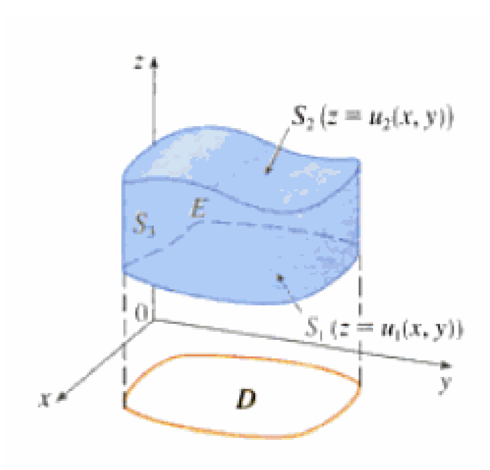


Johann Carl Friedrich Gauss (30 de abril de 1777 – 23 de febrero de 1855, s. XIX), fue un matemático, astrónomo y físico alemán que contribuyó significativamente en muchos campos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la geodesia, el magnetismo y la óptica. Considerado .el príncipe de las matemáticasz .el matemático más grande desde la antigüedad", Gauss ha tenido una influencia notable en muchos campos de la matemática y de la ciencia, y es considerado uno de los matemáticos que más influencia ha tenido en la historia. Fue de los primeros en extender el concepto de divisibilidad a otros conjuntos. Gauss fue un niño prodigio de quien existen muchas anécdotas acerca de su asombrosa precocidad siendo apenas un infante, e hizo sus primeros grandes descubrimientos mientras era apenas un adolescente. Completó su magnum opus, Disquisitiones Arithmeticae a los veintiún años (1798), aunque no sería publicado hasta 1801. Un trabajo que fue fundamental para que la teoría de los números se consolidara y ha moldeado esta área hasta los días presentes

ii) $\nabla \cdot (k\mathbb{F})(x,y,z) = k\nabla \cdot \mathbb{F}(x,y,z),\ k$ *constante*
iii) $\nabla \cdot (\mathbb{F} \cdot \mathbb{G})(x,y,z) = (\nabla \cdot \mathbb{F}(x,y,z)) \cdot \mathbb{G}(x,y,z) + \mathbb{F}(x,y,z) \cdot (\nabla \cdot \mathbb{G}(x,y,z))$
iv) $\nabla \cdot \left(\dfrac{\mathbb{F}}{\mathbb{G}}\right)(x,y,z) = \dfrac{(\nabla \cdot \mathbb{F}(x,y,z)) \cdot \mathbb{G}(x,y,z) - \mathbb{F}(x,y,z) \cdot (\nabla \cdot \mathbb{G}(x,y,z))}{\mathbb{G}^2(x,y,z)}$

Un campo vectorial $\mathbb{F}$ que no posee divergencia se denomina solenoidal y $\nabla \cdot \mathbb{F}(x,y,z) = 0$ en todos los puntos (x,y,z) que está definido $\mathbb{F}$.

Teorema 6.5.1 *de Gauss (Divergencia). Si V es un sólido de $\mathbb{R}^3$ acotado por una superficie cerrada orientable S y sea $\mathbb{N}$ un vector normal a S y si $\mathbb{F}$ es un campo vectorial diferenciable en una bola abierta B de $\mathbb{R}^3$ que contiene S, entonces $\int_S \mathbb{F} \bullet \mathbb{N} dS = \int_R \nabla \bullet \mathbb{F}(x,y,z) dV$*



Demostración.

Como $\mathbb{F}(x,y,z) = [F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)]$
$= F_1(x,y,z)\boldsymbol{i} + F_2(x,y,z)\boldsymbol{j} + F_3(x,y,z)\boldsymbol{k}$
y $\nabla \bullet \mathbb{F}(x,y,z) = \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) + \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) + \dfrac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z)$
Basta demostrar que
$\int_S F_1(x,y,z)\boldsymbol{i} \bullet \mathbb{N} dS = \int\int\int_R \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) dV$
$\int_S F_2(x,y,z)\boldsymbol{j} \bullet \mathbb{N} dS = \int\int\int_R \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) dV$
$\int_S F_3(x,y,z)\boldsymbol{k} \bullet \mathbb{N} dS = \int\int\int_R \dfrac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z) dV$
Dividimos S en 2 superficies S_1 y S_2
cuyas ecucaciones explicitas son $z_1 = G_1(x,y)$ y $z_2 = G_2(x,y)$
Sea R la proyección de S en el plano XY
Entonces
$\int\int\int_R \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) dV = \int_R \left(\int_{G_1(x,y)}^{G_2(x,y)} \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) dz \right) dA$
$= \int_R (F_1(x,y,G_2(x,y)) - F_1(x,y,G_2(x,y))) dA$
Para S_2 $dA = \boldsymbol{k} \bullet \mathbb{N}_2 dS_2$

y para S_1 $dA = -\boldsymbol{k} \bullet \mathbb{N}_1 dS_1$
Luego
$\int_R (F_1(x,y,G_2(x,y) - F_1(x,y,G_2(x,y))\, dA$
$= \int_{S_2} F_1(x,y,z)\boldsymbol{k} \bullet \mathbb{N}_2 dS_2 + \int_{S_1} F_1(x,y,z)\boldsymbol{k} \bullet \mathbb{N}_1 dS_1$
$= \int_S F_1(x,y,z)\boldsymbol{k} \bullet \mathbb{N} dS$
De igual forma se demuestran las otras dos igualdades.
Quedan a cargo del lector ■

Ejemplo 6.5.2 *Comprobar el teorema de Gauss para $\mathbb{F}(x,y,z) = [x+z, y+z, x+y]$ sobre el sólido acotado por $0 \le x^2 + y^2 \le 1$ y $0 \le x \le 2$*

El sólido R es un cilindro tal que
en coordendas cilindricas
$0 \le r \le 1$ $0 \le \theta \le 2\pi$ $0 \le x \le 2$
y $\nabla \bullet \mathbb{F}(x,y,z) = 2$
entonces
$\int_R \nabla \bullet \mathbb{F}(x,y,z) dV$
$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r dr d\theta dx = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2|_0^1 d\theta dx = \int_0^2 \int_0^{2\pi} d\theta dx$
$= \int_0^2 2\pi dx = 4\pi$
Ahora calculamos las integrales de superficie sobre R, *tales que*
$S_1 : x = 0$ $S_2 : x = 2$ $S_3 : y^2 + z^2 = 1$
(i) *para* S_1 $\mathbb{N}_1 = [-1,0,0]$ $y\, dS_1 = dydz$
luego
$\int_S \mathbb{F} \bullet \mathbb{N}_1 dS = \int_R \int (-x - z) dydz$
$= \int_R \int -z dydz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} -r^2 Cos\theta d\theta dr$
$= \int_0^1 r^2 Sen\theta|_0^{2\pi} dr = \int_0^1 0 dr = 0$
(ii) *para* S_2 $\mathbb{N}_2 = [1,0,0]$ $y\, dS_2 = dydz$
luego
$\int_{S_2} \int \mathbb{F} \bullet \mathbb{N}_2 dS = \int_R \int (x+z) dydz$
$= \int_R \int (x+2) dydz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r^2 Cos\theta + 2r) d\theta dr$
$= \int_0^1 (r^2 Sen\theta + 2r\theta)|_0^{2\pi} dr = \int_0^1 4\pi r dr = 2\pi r^2|_0^1 = 2\pi$
ademas si $z = \sqrt{1-y^2}$, $S = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} dydx$
luego
$\int_{S_3} \int \mathbb{F} \bullet \mathbb{N}_3 dS = 2 \int_R \int \dfrac{2y^2 + 4yz + 2xy + 2yz}{\sqrt{4y^2 + 4z^2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} dxdy$
$= 2 \int_R \int \left(\dfrac{2y^2 + 2xy}{\sqrt{1-y^2}} + 4y \right) dxdy$
$= 2 \int_{-1}^1 \int_0^2 \left(\dfrac{2y^2 + 2xy}{\sqrt{1-y^2}} + 4y \right) dxdy$

$= 2\int_{-1}^{1}\left(\dfrac{2y^2x + x^2y}{\sqrt{1-y^2}} + 4xy\right)|_1^2 dy$
$= 2\int_{-1}^{1}\left(\dfrac{4y^2 + 4y}{\sqrt{1-y^2}} + 8y\right) dy$
$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\dfrac{4Sen^2\theta + 4Sen\theta}{Cos\theta} + 8Sen\theta\right) Cos\theta d\theta$
$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(4Sen^2\theta + 4Sen\theta + 8Sen\theta Cos\theta\right) d\theta$
$= 2\left(2\theta + Sen(2\theta) - Cos\theta + 4Sen^2\theta\right)|_{-\pi/2}^{\pi/2}$
$= 2\left(\dfrac{\pi}{2} + 4 + \dfrac{\pi}{2} - 4\right) = 2\pi$
Por lo tanto
$\int_S \mathbb{F} \bullet \mathbb{N} dS = 0 + 2\pi + 2\pi = 4\pi$

Ejercicios sección 6.5.

1. Encuentre la divergencia del campo vectorial $\mathbb{F}$

   a) $\mathbb{F}(x,y,z) = [xyz, yz, z]$
   b) $\mathbb{F}(x,y,z) = e^x seny\mathbf{i} + e^x \cos y\mathbf{j}$
   c) $\mathbb{F}(x,y,z) = e^{-xyz}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

2. Para el campo escalar F encuentre el Laplaciano.

   a) $F(x,y,z) = e^{-x-2y-3z}$
   b) $F(x,y,z) = xseny + y\cos z$
   c) $F(x,y,z) = \ln x + x\ln y + xy\ln z$

3. De un ejemplo de un campo vectorial $\mathbb{F}$ que sea solenoidal.

4. Comprobar el teorema de Gauss para el campo vectorial $\mathbb{F}$, sobre el sólido R

   a) $\mathbb{F}(x,y,z) = [2x, -2y, z^2]$ si R es el cilindro $x^2 + y^2 = 1\,,\ -1 \le z \le 1$.
   b) $\mathbb{F}(x,y,z) = [xz, yz, 3z^2]$ si R es el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y $z = 1$
   c) $\mathbb{F}(x,y,z) = [2xy + z, y^2, -x - 3y]$ si R es el sólido acotado por el plano $2x + 2y + z = 6$ y los planos coordenados.
   d) $\mathbb{F}(x,y,z) = [x, y, z-1]$ si R es la semiesfera $x^2+y^2+(z-1)^2 = 9$ con $1 \le z \le 4$
   e) $\mathbb{F}(x,y,z) = [x^2, y^2, z^2]$ si R es un cubo de lado 1

5. Utilice el teorema de Gauss para hallar el flujo $\mathbb{F}$ a través de la superficie del sólido dado R.

   a) $\mathbb{F}(x,y,z) = [2x, 3y, 4z]$ si R es el tetraedro de vértices $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,0,3)$

   b) $\mathbb{F}(x,y,z) = [x^3, y^3, z^3]$ si R es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

   c) $\mathbb{F}(x,y,z) = [-xz, -yz, z^2]$ si R es el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

   d) $\mathbb{F}(x,y,z) = [xy^2, yz, zx^2]$ si R es el sólido acotado por $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ y $1 \leq z \leq 3$

   e) $\mathbb{F}(x,y,z) = [x^3, y^3, z^3]$ si R es el sólido acotado superiomente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e inferiormente por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

6. Sean $\mathbb{F}(x,y,z) = [2x, 3y, 5z + 6x]$ y $\mathbb{G}(x,y,z) = [3x + 4z^2, 2y + 5x, 5z]$ demuestre que $\int_S \mathbb{F} \bullet \mathbb{N} dS = \int_S \mathbb{G} \bullet \mathbb{N} dS$ si S es cualquier superficie cerrada.

7. Demuestre que si $\mathbb{F}$ es un campo vectorial constante y S es una superficie cerrada entonces $\int_S \mathbb{F} \bullet \mathbb{N} dS = 0$

8. Calcular la integral de superficie $\int_S [xy^2, yz^2, zx^2] dS$ siendo S la región acotada por los cilindros $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 = 1$

9. Comprobar que $\int_S [x, y, z] dS = 3V$ donde V es el volumen del sólido acotado por la superficie cerrada S.

10. Utilice un CAS para representar la divergencia de un campo vectorial.

Ejercicios de repaso del capitulo 6

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

1. La parametrización de una superficie es única

2. El producto vectorial fundamental es un gradiente

3. Una superficie es simple si no se corta a si misma

4. Para calcular una integral de superficie esta se debe parametrizar

5. Si una superficie es cerrada, determina un volumen

6. Una superficie orientable posee normales exteriores e interiores

7. La integral de superficie de un campo escalar se denomina flujo

8. El teroema de Stokes no es aplicable en el plano

9. El teorema de Gauss es solamente aplicable sobre sólidos.

10. La integral de flujo a traves de un sólido se puede calcular aplicando el teorema de Gauss.

PREGUNTA DE SELECCIÓN MULTIPLE CON UNICA RESPUESTA

1. Una superficie S esta parametrizada por medio de $\tau(u, v) = [\cos v, 2senv, u]$ entonces

A. S es un paraboloide B. S es un cilindro C. S es un hiperboloide. D. S es un elipsoide

2. Una superficie S esta parametrizada por medio de $\tau(u, v) = [2\cos v, 3senv, u]$ entonces

A. $[-2senv, 3\cos v, 0]$ es normal a S B. $[0, 0, -1]$es tangente a S C. $[-3\cos v, 2senv, 0]$ es tangente a S D. $[2senv, 3\cos v, 0]$ es normal a S

3. La masa del helicoide cuya ecuación vectorial es $\tau(u, v) = [\cos v, usenv, v]$ con $0 \leq u \leq 1$ y $0 \leq v \leq 2\pi$ y cuya densidad en cada punto es $\delta = \sqrt{x^2 + y^2}$, es igual a:

A.$\left(4\sqrt{2} + 2\right)\pi$ B. $\left(\dfrac{4\sqrt{2} + 2}{3}\right)\pi$ C. $\left(\dfrac{4\sqrt{2} - 2}{3}\right)\pi$ D. $\left(4\sqrt{2} - 2\right)\pi$

4. El flujo del campo vectorial $\mathbb{F}(x, y, z) = xzi - yzj + z^2k$ a través del elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ es igual a:

A. πab B. πbc C. 0 D. πabc

5. El flujo máximo de $\mathbb{F}(x, y, z) = [-x^2 - 4xy, -6yz, 12z]$hacia el exterior de un paralelepípedo de aristas a, b y c, es igual a:

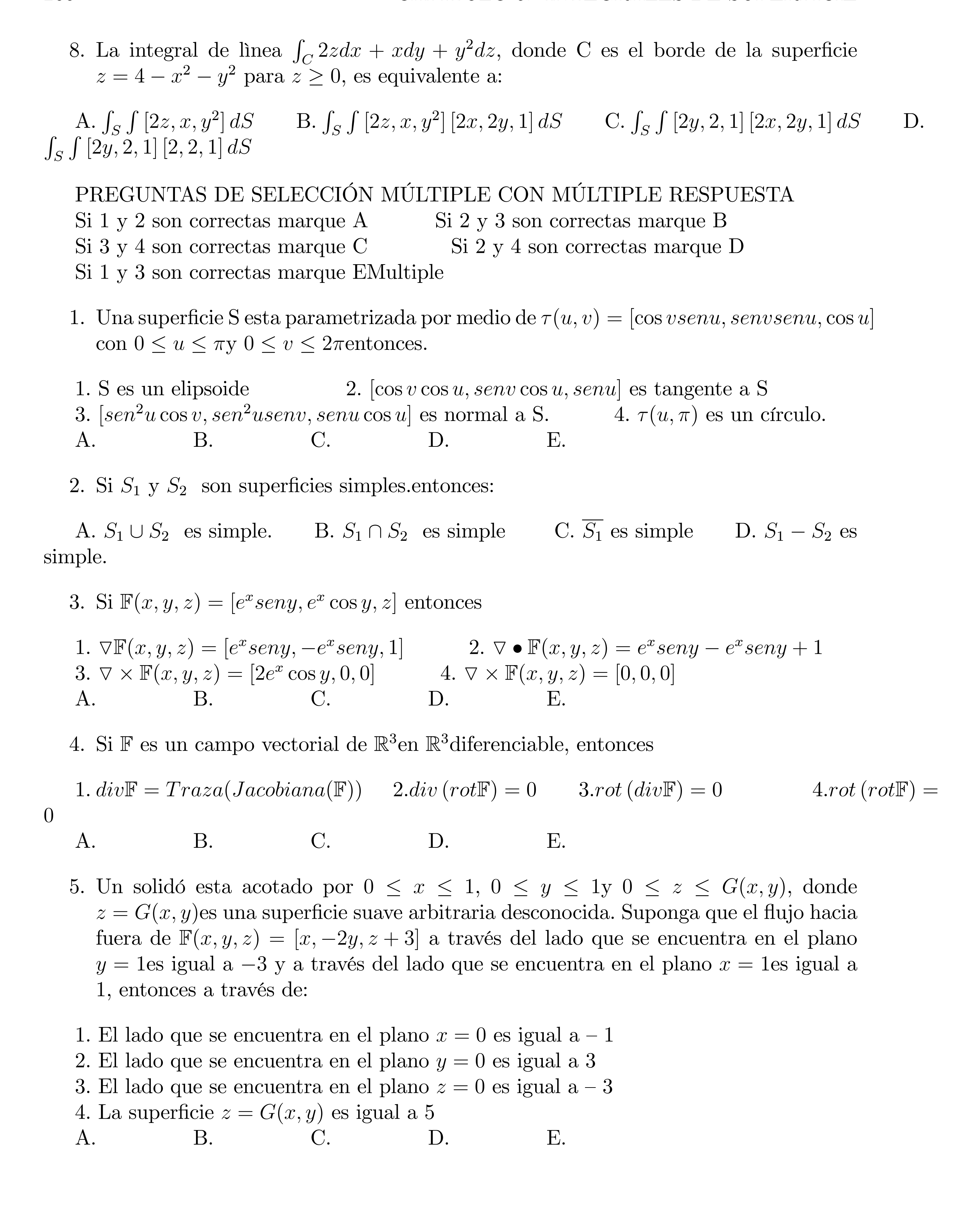
A. 27 B. – 27 C. 30 D. 7

6. El valor de la integral de línea $\int_C ydx + zdy + xdz$ si C es la curva intersección entre las superficies $x + y = 2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$ es igual a:

A. -1 B.$2\sqrt{2}\pi$ C. 1 D. $-2\sqrt{2}\pi$

7. Sean F un campo escalar y $\mathbb{F}$ un campo vectorial diferenciables, determine cual de las siguientes expresiones tiene sentido.

A. $\nabla(\nabla F)$ B. $\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbb{F})$ C. $\nabla \times (\nabla \times \mathbb{F})$ D. $\nabla \cdot (\nabla F)$



8. La integral de lìnea $\int_C 2zdx + xdy + y^2dz$, donde C es el borde de la superficie $z = 4 - x^2 - y^2$ para $z \geq 0$, es equivalente a:

A. $\int_S \int [2z, x, y^2]\, dS$ B. $\int_S \int [2z, x, y^2]\, [2x, 2y, 1]\, dS$ C. $\int_S \int [2y, 2, 1]\, [2x, 2y, 1]\, dS$ D. $\int_S \int [2y, 2, 1]\, [2, 2, 1]\, dS$

PREGUNTAS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE CON MÚLTIPLE RESPUESTA
Si 1 y 2 son correctas marque A Si 2 y 3 son correctas marque B
Si 3 y 4 son correctas marque C Si 2 y 4 son correctas marque D
Si 1 y 3 son correctas marque EMultiple

1. Una superficie S esta parametrizada por medio de $\tau(u, v) = [\cos v senu, senvsenu, \cos u]$ con $0 \leq u \leq \pi$y $0 \leq v \leq 2\pi$entonces.

1. S es un elipsoide 2. $[\cos v \cos u, senv \cos u, senu]$ es tangente a S
3. $[sen^2u \cos v, sen^2usenv, senu \cos u]$ es normal a S. 4. $\tau(u, \pi)$ es un círculo.
A. B. C. D. E.

2. Si S_1 y S_2 son superficies simples.entonces:

A. $S_1 \cup S_2$ es simple. B. $S_1 \cap S_2$ es simple C. $\overline{S_1}$ es simple D. $S_1 - S_2$ es simple.

3. Si $\mathbb{F}(x, y, z) = [e^x seny, e^x \cos y, z]$ entonces

1. $\nabla\mathbb{F}(x, y, z) = [e^x seny, -e^x seny, 1]$ 2. $\nabla \bullet \mathbb{F}(x, y, z) = e^x seny - e^x seny + 1$
3. $\nabla \times \mathbb{F}(x, y, z) = [2e^x \cos y, 0, 0]$ 4. $\nabla \times \mathbb{F}(x, y, z) = [0, 0, 0]$
A. B. C. D. E.

4. Si $\mathbb{F}$ es un campo vectorial de $\mathbb{R}^3$en $\mathbb{R}^3$diferenciable, entonces

1. $div\mathbb{F} = Traza(Jacobiana(\mathbb{F}))$ 2.$div\,(rot\mathbb{F}) = 0$ 3.$rot\,(div\mathbb{F}) = 0$ 4.$rot\,(rot\mathbb{F}) = 0$
A. B. C. D. E.

5. Un solidó esta acotado por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$y $0 \leq z \leq G(x, y)$, donde $z = G(x, y)$es una superficie suave arbitraria desconocida. Suponga que el flujo hacia fuera de $\mathbb{F}(x, y, z) = [x, -2y, z + 3]$ a través del lado que se encuentra en el plano $y = 1$es igual a -3 y a través del lado que se encuentra en el plano $x = 1$es igual a 1, entonces a través de:

1. El lado que se encuentra en el plano $x = 0$ es igual a – 1
2. El lado que se encuentra en el plano $y = 0$ es igual a 3
3. El lado que se encuentra en el plano $z = 0$ es igual a – 3
4. La superficie $z = G(x, y)$ es igual a 5
A. B. C. D. E.

6. Sean S_1el hemisferio superior de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$, S_2la porción del paraboloide $z=x^2+y^2-4$que se encuentra debajo del plano xy, $\mathbb{N}_1$y $\mathbb{N}_2$las normales exteriores a S_1y S_2respectivamente, y $\mathbb{F}(x,y,z)=[x,-y,z]$un campo vectorial, se cumple que:

1. $\int_{S_1}\int \mathbb{F}\times\mathbb{N}_1 ds=\int_{S_2}\int \mathbb{F}\times\mathbb{N}_2 ds$ 2.$\int_{S_1}\int \mathbb{F}\cdot\mathbb{N}_1 ds=\int_{S_2}\int \mathbb{F}\cdot\mathbb{N}_2 ds$
3. $\int_{S_1}\int \mathbb{F}\cdot\mathbb{N}_1 ds=Volumen(S)$ si $S=S_1\bigcup S_2$ 4. $\int_{S_1}\int \mathbb{F}\times\mathbb{N}_1 ds<\int_{S_2}\int \mathbb{F}\times\mathbb{N}_2 ds$
A. B. C. D. E.

PREGUNTAS ABIERTAS

1. Demuestre que $F(x,y)=|x|+|y|$ no es una superficie simple.

2. Determine los puntos de la superficie $r(u,v)=[u^2+v^2,u+3v,-5v]$donde el plano tangente es paralelo al plano $5x-6y+2z=7$

3. Si $\boldsymbol{r}(u,v)=[u+v,u^2+v^2,u^3+v^3]$ halle el producto vectorial fundamental de $\boldsymbol{r}(u,v)$ y determine los puntos (u,v) para los cuales $\dfrac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial v}$ son linealmente independientes.

4. Hallar el área de la superficie común a los cilindros $x^2+y^2=a^2$ y $x^2+z^2=a^2$

5. Si S es una esfera de radio a, determine el área de la porción de esfera que se encuentra entre los planos $z=\dfrac{a}{2}$ y $z=\dfrac{a}{4}$

6. Una rampa en forma de espiral esta determinada por la ecuación $r(u,v)=[ucosv,usenv,c$ con $a\le u\le b$ y $0\le v\le 2\pi$ y c es un parametro que determina la pendiente de la rampa. Determinar el área de la superficie de esta rampa.

7. Calcular la integral de superficie $\int_S F(x,y,z)dS$, si S es la porción del paraboloide $z=2-(x^2+y^2)$ sobre el plano xy , y:

   a) $F(x,y,z)=1$
   b) $F(x,y,z)=x^2+y^2$
   c) $F(x,y,z)=3z$

8. Hallar el centro de masas de la superficie esferica $x^2+y^2+z^2=a^2$ que se encuentra dentro del cono $zTan\alpha=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$

9. Si S es la superficie determinada por el triángulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$, y $\mathbb{F}(x,y,z)=[x,y,z]$ .Calcular la integral de superficie $\int_S \mathbb{F}\bullet\mathbb{N}dS$ utilizando

   a) La representación vectorial $\boldsymbol{r}(u,v)=[u+v,u-v,1-2u]$
   b) Una representación explicita de la forma $z=F(x,y)$

10. Si S es una superficie con frontera C y $\mathbb{F}$ es un campo vectorial tal que $\nabla\times\mathbb{F}$ es tangente en cada punto de S demuestre que $\int_C Fd\alpha=0$

11. Si F es un campo escalar definido en una bola abierta B de $\mathbb{R}^3$ tal que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$ en B demuestre que $\int_S \int \nabla F \cdot \mathbb{N} ds = 0$ donde S es la frontera de B.

12. Calcule el fluo del campo $F(x, y, z) = x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} - z\overrightarrow{\mathbf{k}}$ a través de la región común a las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

13. Calcule el flujo del campo $\mathbb{F}(x, y, z) = \dfrac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ a travès del elipsoide $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 = 36$

14. Compruebe el teorema de Stokes para $\mathbb{F}(x, y, z) = [x + 2y, 3x + z, x + y + z]$, si S es la porción de cilindro $x^2 + y^2 = 4$, $-1 \leq z \leq 1$

15. Verificar el teorema de Stokes para $\mathbb{F}(x, y, z) = [y + z, -xz, y^2]$, si S es la porción del primer octante acotada por $2x + z = 6$ y $y = 2$, que no queda:

    a) En el plano XY
    b) En el plano $Y = 2$
    c) En el plano $2x + z = 6$

16. Un campo escalar F tiene la propiedad $\|\nabla F\|^2 = 4F$ y $\nabla \cdot (F\nabla F) = 10F$. Calcular la integral de superficie $\int_S \int \nabla F \cdot \mathbb{N} ds$ donde S es la superficie de la esfera unitaria con centro en el origen y $\mathbb{N}$ es un vector normal unitario exterior a S

17. Si $\mathbb{F}$ es constante, demuestre que $\int_S \mathbb{F} \bullet \mathbb{N} d\alpha = 0$ para cualquier superficie S suave y cerrada.

18. Calcular la integral de superficie $\int_S \int xdydz + ydzdx + zdxdy$ si S es la superficie acotada por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ y los planos $z = 0$ y $z = 3$

    a) Directamente
    b) Utilizando el teorema de Gauss

19. Calcular la integral de superficie $\int_S \int 4xzdydz - y^2dzdx + yzdxdy$ si S es un cubo de arista 1.

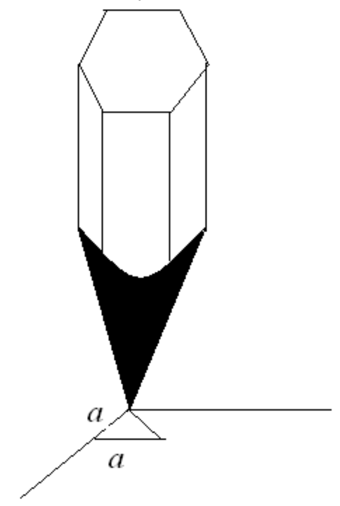
    a) Directamente
    b) Aplicando el teorema de Gauss

20. Si S es una superficie cerrada que encierra un volumen V y $\mathbb{F}(x, y, z) = [ax, by, cz]$ demostrar que $\int_S \int \mathbb{F} \bullet \mathbb{N} dS = (a + b + c)V$

Problemas

1. La tienda de un indio esta hecha de una tela impermeable con forma conica de altura 6 m y base circular de radio 2 m, determine la cantidad de material que se empleo en la elaboraciòn de la tienda.

2. La punta de un lápiz es el resultado de la intersección del cono $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$con un prisma hexagonal regular de lado a, de manera que el cono y el prisma tiene el mismo eje. Hallar el área de la superficie cónica de dicha punta sabiendo que la sexta parte proyecta sobre un triángulo equilátero tal como se muestra en la figura.

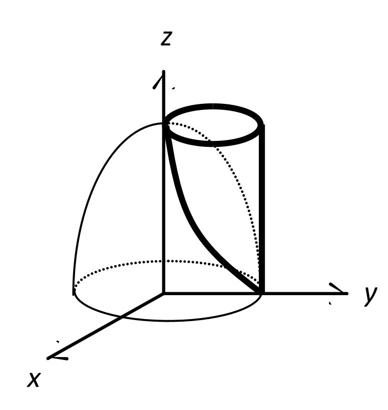


3. Una catedral tiene una cúpula cuya forma es la de un paraboloide de revolución con ecuación $4z = 64 - x^2 - y^2$se sabe que un pintor cobra por mano de obra \$2000 por metro cuadrado, mientras que el bote de pintura que rinde para $40m^2$cuesta \$9000.

   a) Cual es el área de la cúpula

   b) Cual es el costo total por pintar la cúpula.

4. La superficie de una montaña responde a la ecuación $x^2 + y^2 + z = 4R^2$ Sobre una de sus laderas se construye un restaurante cilíndrico, de radio R, según muestra la figura. La temperatura viene dada por $T(x, y, z) = 3x^2 + (y - R)^2 + 16z^2$. Definamos la función densidad de flujo de calor V como $V = -k\nabla T$, donde k es una constante que depende de los materiales. Determinar el flujo de V a través de la superficie de contacto entre el restaurante y la montaña. (La respuesta dependerá de R y de k).



5. Un globo tiene la forma de una esfera truncada de radio 4, con truncamiento circular de radio 1. Si los gases calientes se escapan a través de la superficie porosa del globo según el campo de velocidades $V(x, y, z) = \nabla \times \Phi(x, y, z)$ donde $\Phi(x, y, z) = -y\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + x\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Calcular el flujo de los gases a través de la superficie del globo.

APÉNDICE A

Apendice

Afterword